

БИБЛИОТЕЧКА

КВАНТ

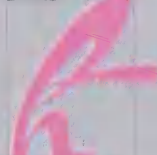
80
ВЫПУСК



И.Ш.Слободецкий
Л.Г. Асламазов

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

Б Ю Р О



КВАНТУМ



БИБЛИОТЕЧКА

КВАНТ

В Ы П У С К

86

И.Ш.Слободецкий

Л.Г. Асламазов

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ



УДК 530.1
ББК 22.3
С48

Серия «Библиотечка
«Квант» основана в 1980 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

А.А.Болибрух, Б.М.Болотовский, А.А.Варламов,
В.Л.Гинзбург, Г.С.Голицын, Ю.В.Гуляев, М.И.Каганов,
С.С.Кротов, С.П.Новиков, Ю.А.Осипьян (председатель),
В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.А.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, А.Р.Хохлов, А.И.Черноуцан (ученый
секретарь)

Научный редактор выпуска А.И.Черноуцан

Слободешкий И.Ш., Асламазов Л.Г.

С48 Задачи по физике. — 2-е изд. — М.: Бюро Квантум,
2001. — 160 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 86)
ISBN 5-85843-030-9

Книга представляет собой сборник задач, для решения которых вполне достаточно знаний в рамках школьной программы. Однако это не простые задачи. Они требуют ясного понимания основных физических законов, умения применять эти законы, а иногда и просто сообразительности.

Все задачи снабжены решениями, многие из которых представляют собой небольшие исследования.

Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий, физических кружков и факультативов, а также для тех, кому просто интересна физика.

ББК 22.3

ISBN 5-85843-030-9

© Бюро Квантум, 2001

Серия научно-популярных книг «Библиотечка «Квант»» снискала заслуженную любовь среди любителей математики и физики. За 15 лет было издано 85 книг этой серии, но, к сожалению, в 1994 году выпуск книг был вынужденно приостановлен. После этого читатели журнала «Квант» неоднократно обращались с просьбами возобновить издание любимой Библиотечки, причем за счет не только издания новых книг, но и переиздания лучших из старых выпусков, которые давно уже стали раритетными.

По поручению Президиума РАН издательство «Бюро Квантум» и редакция журнала «Квант» в 2001 году приступили к регулярному изданию новых и переизданию старых книг Библиотечки «Квант». И для начала было решено переиздать одну из первых книг – «Задачи по физике» И.Ш.Слободецкого и Л.Г.Асламазова (выпуск 5, 1980 г.).

Авторы этой книги со студенческих лет были активными организаторами олимпиадного движения, а когда появился журнал «Квант», с энтузиазмом включились в его издание. Они не только писали статьи и придумывали задачи, но и (в разные годы) руководили физическим разделом журнала, формировали его структуру, вводили новые рубрики, заказывали и отбирали статьи, в общем – создавали стиль журнала и его политику. И этот «квантовский» стиль в полной мере ощущается в созданной ими книге, которая совсем не похожа на другие задачники – решения многих задач разворачиваются в рассказы о любимой физике и небольшие исследования, ярко демонстрирующие мощь и красоту физического мышления.

К сожалению, оба автора давно ушли из жизни. Однако их творческая мысль продолжает жить, в том числе и на страницах этой книги.

Текст книги подвергнут небольшой редакторской правке, учитывающей изменения в школьной программе по физике и устраняющей замеченные неточности.

2001 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Каждый школьник знает, что нельзя изучить физику, не решая задач. Простые задачи разбирают на уроке, более сложные задаются на дом, еще более сложные, как говорят «нестандартные», задачи решают на олимпиадах.

Большинство людей считает решение задач делом необходимым, но довольно скучным. В немалой степени это связано с тем, что в задачах, как правило, речь идет о идеализированных телах и системах, упрощенных до такой степени, что трудно поверить в то, что эти задачи имеют хотя бы какое-то отношение к реальному миру и что их решение может помочь в объяснении тех или иных интересных явлений, с которыми мы сталкиваемся в повседневной жизни. В действительности же решение почти любой задачи может много дать не только для изучения законов, изложенных в учебнике, и в привитии навыков пользования этими законами, но и помочь понять, что происходит в окружающем нас мире. Нужно только увидеть связь между упрощенной ситуацией, о которой идет речь в задаче, и реальными явлениями. Именно это мы и хотели показать читателям книги.

Для сборника мы постарались отобрать те задачи, которые непосредственно связаны с реальными объектами и явлениями, или те, решение которых позволяет обсудить интересные вопросы современной физики и техники. По этой причине решения задач в ряде случаев представляют собой небольшие научно-популярные статьи.

Пользуясь случаем, мы хотели бы выразить благодарность своим друзьям В.Е.Белонучкину, Ю.М.Бруку, И.Ф.Гинзбургу, С.М.Козелу, Г.Л.Коткину, А.Л.Стасенко, вместе с которыми много раз составляли задачи для олимпиад и обсуждали их решения.

1980 г.

ЗАДАЧИ

Многие вещи нам непонятны не потому, что наши понятия слабы, но потому, что сии вещи не входят в круг наших понятий.

К.Прутков. Плоды раздумий

МЕХАНИКА

1. В киноаппарате и кинопроекторе проходит 16 кадров в секунду. На экране движется автомобиль с колесами, реальный диаметр которых 1 м. Изображения колес делают 4 оборота в секунду. Какова скорость автомобиля?

2. Если смотреть на свет сквозь две наложенные друг на друга гребенки с разной частотой зубьев, то светлые участки будут чередоваться с темными. С какой скоростью будут перемещаться светлые места, если одну из гребенок двигать со скоростью 1 см/с? Неподвижная гребенка имеет 5 зубьев на сантиметр, а движущаяся – 6.

3. На рисунке 1 показана часть траектории движения тела, брошенного под углом к горизонту. В точке А скорость тела была равна 20 м/с. Используя рисунок, найдите, сколько времени тело двигалось из точки А в точку В.

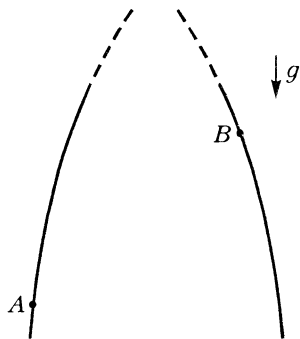


Рис. 1

4. Тяжелый ящик перемещают с помощью двух тракторов, движущихся со скоростями \vec{v}_1 и \vec{v}_2 , составляющими друг с другом угол α (рис. 2). Как направлена и чему равна скорость ящика в тот момент, когда канаты параллельны векторам \vec{v}_1 и \vec{v}_2 ?

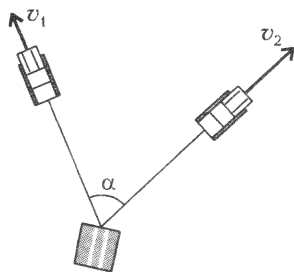


Рис. 2

5. Может ли спортсмен на водных лыжах двигаться быстрее «везущего» его катера?

6. Тяжелый диск радиусом R

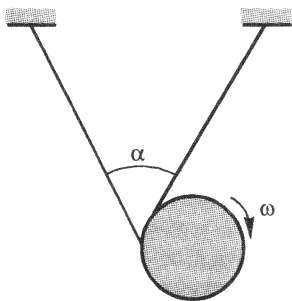


Рис. 3

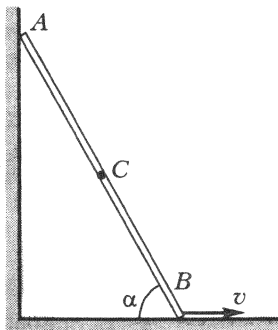


Рис. 4

скатывается на двух нерастяжимых нитях, намотанных на него. Свободные концы нитей закреплены (рис.3). Нити при движении диска постоянно натянуты. В некоторый момент угловая скорость диска равна ω , а угол между нитями α . Какова в этот момент скорость центра диска?

7. Концы A и B стержня AB скользят по сторонам прямого угла (рис.4). Как зависит от угла α ускорение середины стержня (точка C), если конец B движется с постоянной скоростью v ? Длина стержня l .

8. Тринадцать одинаковых шестеренок, оси которых закреплены, сцеплены друг с другом, образуя кольцо. На какой наибольший угол можно повернуть одну из шестеренок, если каждую из них при неподвижной соседней можно повернуть, за счет неточного сцепления, на угол α ?

9. Спутник пролетает над Новосибирском в 12.00, а над Москвой в 15.00. Где он будет в 18.00; в 19.30? Время всюду московское.

10. Каким было бы число дней в году, если бы Земля вращалась вокруг собственной оси или обращалась вокруг Солнца в противоположную сторону?

11. Студент, институт которого находится рядом со станцией кольцевой линии метрополитена, живет у станции метро, также находящейся на кольцевой линии, но в противоположном конце города, так что ему безразлично, в какую сторону ехать. Поэтому он всегда садится в тот поезд, который подойдет первым. Количество поездов, идущих как в одну, так и в другую сторону, одинаково. Студент, однако, заметил, что он чаще ездит на поезде, идущем по часовой стрелке. Чем это можно объяснить?

12. Из двух портов A и B , расстояние между которыми l , одновременно выходят два катера, один из которых плывет со скоростью v_1 , а другой — со скоростью v_2 . Направление движения первого катера составляет угол α , а второго — угол β с линией AB (рис.5). Каким будет наименьшее расстояние между катерами?

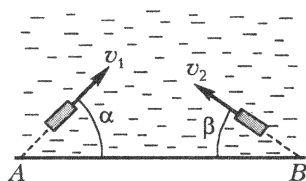


Рис. 5

13. За лисой, бегущей прямолинейно и равномерно со скоростью v_1 , гонится собака, скорость которой равна v_2 , постоянна по абсолютной величине и направлена все время на лису. В момент, когда скорости \vec{v}_1 и \vec{v}_2 оказались взаимно перпендикулярными, расстояние между лисой и собакой было l . Каково было ускорение собаки в этот момент?

14. Космонавты, находясь вблизи одной из звезд некоторого звездного скопления, видят, что все другие звезды скопления удаляются от них со скоростями, пропорциональными расстояниям до этих звезд. Какую картину движения звезд увидят космонавты, оказавшись вблизи какой-нибудь другой из звезд этого скопления?

15. Имеется однородный шнур со взрывчатым веществом. Скорость распространения взрывной волны по воздуху v_1 , а скорость горения шнура v_2 ($v_2 > v_1$). Найдите форму линии, по которой нужно расположить шнур, чтобы волны от всех точек шнура пришли в заданную точку одновременно?

16. В стеклянную цилиндрическую пробирку, расположенную вертикально, вдвинут снизу ершик для мытья пробирок. Что будет происходить с ершиком, если трубку слегка покачивать в вертикальной плоскости?

17. Человек, чтобы не поскользнуться на обледенелой горке, сбегает с нее. Почему это целесообразно?

18. Железная дорога идет так, как показано на рисунке 6. Какой участок пути подвергается наибольшему разрушению при движении поездов?

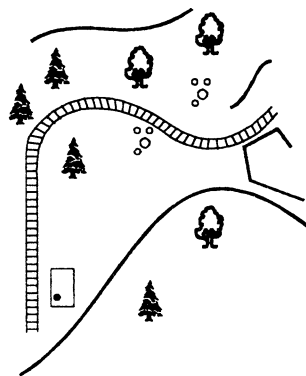


Рис. 6

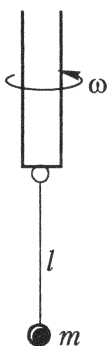


Рис. 7

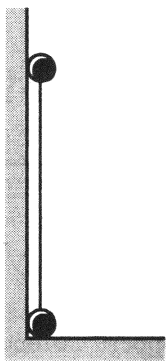


Рис. 8

Нижний шарик гантели смещают горизонтально на очень маленькое расстояние, и гантелька начинает двигаться. Найдите скорость нижнего шарика в тот момент, когда верхний шарик оторвется от вертикальной плоскости.



Рис. 9

Знаменитый американский физик Роберт Вуд построил телескоп с параболическим зеркалом, поместив на дне колодца вращающийся сосуд со ртутью. В каких пределах можно было изменять фокусное расстояние получившегося ртутного зеркала телескопа при изменении угловой скорости ω вращения сосуда в пределах от 1 до 2 с⁻¹?

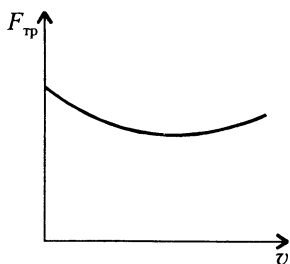


Рис. 10

19. Шарик массой m прикреплен к стержню длиной l (рис.7). Другой конец стержня шарнирно прикреплен к вертикальной оси. Нарисуйте примерный график зависимости угла α , образуемого стержнем с вертикалью, от угловой скорости ω вращения оси.

20. Почему конькобежцы размахивают руками при беге?

21. В какую сторону наклоняются при повороте: самолет; пароход; подводная лодка? Почему?

22. Гантелька длиной l стоит в углу, образованном гладкими

плоскостями (рис.8). Нижний шарик гантели смещают горизонтально на очень маленькое расстояние, и гантелька начинает двигаться. Найдите скорость нижнего шарика в тот момент, когда верхний шарик оторвется от вертикальной плоскости.

23. Для измерения ускорения используется изогнутая по дуге окружности трубка, заполненная водой, в которой имеется пузырек воздуха (рис.9). Как связано положение пузырька с ускорением трубки?

24. Знаменитый американский физик Роберт Вуд построил телескоп с параболическим зеркалом, поместив на дне колодца вращающийся сосуд со ртутью. В каких пределах можно было изменять фокусное расстояние получившегося ртутного зеркала телескопа при изменении угловой скорости ω вращения сосуда в пределах от 1 до 2 с⁻¹?

25. График зависимости силы сухого трения от скорости изображен на рисунке 10. Используя этот график, объясните, почему звучит скрипичная струна, когда по ней равномерно ведут смычком.

26. Почему автомобиль при резком торможении теряет управление (машину «заносит»)?

27. Почему легче проткнуть шилом дырку, если шило вращает-

ся? Почему нужно вращать гвоздь, чтобы вытащить его из стены?

28. Очень тонкую нить, собранную в клубок, начинают вытягивать вверх за один конец с постоянной скоростью v . Масса единицы длины нити μ . С какой силой приходится тянуть за нить в тот момент, когда длина вытянутого конца l ?

29. Две одинаковые тележки, на которых находятся два одинаковых дворника, движутся по инерции с одинаковыми скоростями параллельно друг другу. В некоторый момент времени на тележки начинает падать снег равномерным потоком. Дворник, стоящий на одной из тележек, все время сбрасывает снег вбок, а на второй тележке дворник спит. Какая из тележек быстрее пройдет одно и то же расстояние?

30. Для межзвездных путешествий ракета должна достигать скорости, сравнимой со скоростью света. Оцените возможность использования для такой ракеты химического двигателя, действующего на реакции окисления водорода, если теплотворная способность водорода $1,1 \cdot 10^8$ Дж/кг. Какой должна быть масса топлива для достижения ракетой массой 20 т скорости 0,01 скорости света?

31. Плоская бесконечная струя толщиной d_0 падает под углом α на плоскость (рис.11). Скорость струи v , ее плотность ρ . На какие струи распадается струя при падении?

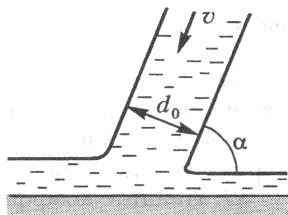


Рис.11

32. По водопроводной трубе течет вода со скоростью 10 м/с. Докажите, что если резко (мгновенно) закрыть кран, давление на кран станет равным 150 атм. (Из-за этого нельзя, например, даже при аварии слишком быстро перекрывать поток воды в водосливе.)

33. Труба радиусом r заполнена веществом плотностью ρ_0 . Невесомый поршень, на который действует постоянная сила \vec{F} , вдвигаясь в трубу, уплотняет

это вещество (рис.12). Уплотнение происходит скачком, т.е. в трубе как бы перемещается с некоторой скоростью s поверхность, справа от которой плотность вещества ρ_0 , а слева больше чем ρ_0 .

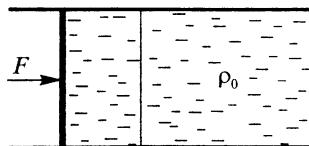


Рис. 12

В начальный момент поверхность совпадает с плоскостью поршня. Найдите скачок $\Delta\rho$ плотности вещества.

34. Землетрясения вызывают иногда появление громадных отдельных волн — цунами, распространяющихся на огромные расстояния. Длина таких волн во много раз превышает глубину океана, а высота достигает нескольких десятков метров. При таких волнах в движение приходит вся вода под волной вплоть до океанского дна. (Аналогичной волной является приливная волна.) Найдите скорость цунами, полагая среднюю глубину океана равной 5 км.

35. Отклоните стул, стоящий на достаточно гладком полу, на небольшой угол и отпустите. Объясните наблюдаемое движение стула.

36. Почему пуля, вылетевшая из ружья, не может отворить дверь, но пробивает в ней отверстие, в то время как давлением пальца дверь отворить легко, а проделать отверстие невозможно?

Почему пуля пробивает в пустом тонкостенном стакане лишь два маленьких отверстия, в то время как стакан, наполненный водой, разбивается при попадании в него пули вдребезги?

37. Насос подает объем V воды в час на высоту H по трубе диаметром d . Какова мощность насоса? Можно ли с помощью насоса меньшей мощности подавать объем V воды в час на высоту H ?

38. Модель вертолета, изготовленная в $1/10$ натуральной величины, удерживается в воздухе при помощи мотора мощностью 30 Вт. Оцените, какой должна быть мощность двигателя вертолета, сделанного из тех же материалов, что и модель.

39. Найдите коэффициент полезного действия водометного двигателя реактивного катера, если площадь входного отверстия двигателя $0,9 \text{ м}^2$, а выходного $0,02 \text{ м}^2$.

40. Автомобиль массой 600 кг трогается с места. Двигатель автомобиля работает с постоянной мощностью 50 кВт, коэффициент трения скольжения колес о дорогу 0,6. Оцените, за какое минимальное время автомобиль наберет скорость 100 км/ч. Соппротивлением воздуха и трением в механизмах пренебречь.

41. Астронавты «Скайлэба» с помощью специального радиолокационного высотомера обнаружили, что поверхность океана в районе «Бермудского треугольника» ниже нормального уровня на 25 метров. Предполагая, что этот «прогиб» можно объяснить наличием под дном океана шаро-

вой полости, заполненной водой, оцените радиус этой полости. Глубина океана 6 км.

42. Спутник Земли движется по круговой орбите на высоте 760 км над поверхностью Земли. Его хотят перевести на эллиптическую орбиту с максимальным удалением от поверхности Земли 40000 км и минимальным расстоянием от поверхности 760 км. На сколько для этого необходимо изменить скорость спутника? Каким будет период обращения спутника по новой, эллиптической, орбите?

43. Два спутника *A* и *B* движутся по одной и той же круговой орбите на небольшом расстоянии друг от друга. Необходимо осуществить стыковку спутников. Удастся ли это сделать, если, включив двигатель, сообщить спутнику *B* импульс в направлении к спутнику *A*?

44. Шар массой *m* налетает на покоящийся шар массой *M*. Найдите, как зависит от отношения масс шаров энергия, которую теряет налетающий шар при упругом центральном столкновении.

45. Кубик, скользящий без трения по гладкому горизонтальному полу, ударяется одной из своих боковых граней о вертикальную стенку. Коэффициент трения кубика о стенку μ . Под каким углом к стенке отскочит кубик, если до столкновения с ней он двигался по направлению, составляющему со стенкой угол α ?

46. Почему футболистам было бы тяжело играть слабо накачанным или «перекачанным» мячом?

47. Атом, движущийся со скоростью v ($v \ll c$), испускает фотон под малым углом α к направлению своего движения. Докажите, что если частота излучения покоящегося атома ν_0 , а частота излучения движущегося атома ν , то для видимого света $\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \approx \frac{v}{c} \cos \alpha$, где c — скорость света.

48. Почему обычно γ -кванты, излученные ядрами радиоактивного вещества, не могут поглотиться подобными же ядрами? Известно, что внутренняя энергия ядра может иметь только определенные значения.

49. Машина, служащая для укатки дороги (каток), опирается на цилиндрические шины-катки. Спереди пять катков, а сзади семь. Как сделать так, чтобы давление всех шин-катков на грунт было одинаковым вне зависимости от профиля дороги и накачки шин?

50. На цилиндрический столб намотан один виток каната. Для того чтобы канат не скользил по столбу, когда за один из

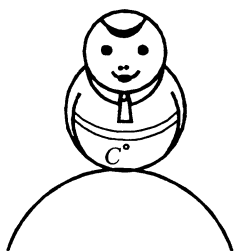


Рис. 13

его концов тянут с силой F , за второй конец каната нужно тянуть с силой f . Как изменится сила f , если на столб будет намотано n витков каната (f не зависит от толщины каната)?

51. На верхнюю точку закрепленного шара радиусом R поставлен Ванька-Встанька (рис.13). Нижняя поверхность игрушки – полушар радиусом r ; центр тяжести игрушки (точка C) расположен на половине радиуса полушара. Упадет ли Ванька-Встанька с шара? Проскальзывания нет.

52. Концы пружины в нерастянутом состоянии закреплены. Как обработать пружину так, чтобы она стремилась сократиться?

53. К двум точкам прикреплены цепочка длиной l и концы двух стержней, сумма длин которых тоже l , а свободные концы связаны шарнирно. Чей центр тяжести находится ниже – цепочки или системы стержней?

54. Какой стакан более устойчив – пустой или с сахаром?

55. Почему трещина в лопающейся трубе, когда в ней зимой замерзает вода, всегда идет вдоль, а не поперек трубы?

56. Почему значительно легче удерживать на пальце половую щетку, перевернутую «вверх ногами», чем палку той же длины?

57. Почему можно управлять движением велосипеда при езде «без рук»?

58. В полусферический колокол, плотно лежащий на столе, наливают через отверстие сверху воду (рис.14). Когда вода доходит до отверстия, она приподнимает колокол и начинает вытекать снизу. Найдите массу колокола, если его радиус R , а плотность воды ρ .

59. Сообщающиеся сосуды, один из которых сужается, а другой расширяется кверху, заполнены водой (рис.15). Как

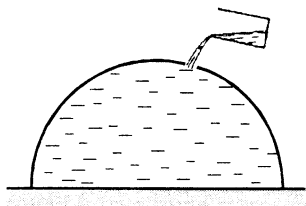


Рис. 14

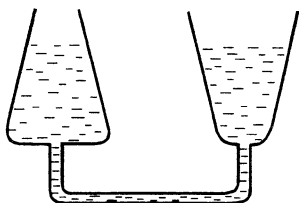


Рис. 15

будет меняться количество воды в сосудах при нагревании одного из них?

60. Два одинаковых открытых сосуда соединены двумя одинаковыми трубками и доверху заполнены водой. Трубки закрыты кранами K_1 и K_2 (рис.16). Температура воды в сосудах поддерживается посто-

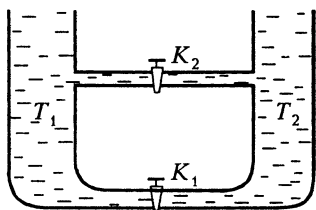


Рис.16

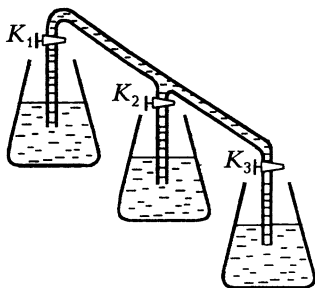


Рис.17

янной, причем $T_1 > T_2 > 4^\circ \text{C}$. Что будет происходить с водой в сосудах, если сначала открыть кран K_1 , а затем (при открытом кране K_1) открыть кран K_2 ?

61. Три открытые бочки наполнены до половины водой и установлены на разной высоте (рис.17). Из каждой бочки проведены вверх трубки, соединяющиеся вместе. Трубки тоже заполнены водой. Куда будет перетекать вода по трубкам, если одновременно открыть краны K_1 , K_2 и K_3 ?

62. Вода переливается через край плотины (рис.18). Во время паводка водосброс (объем воды, который проходит в одну секунду) увеличивается втрое. Во сколько раз возрастает при этом уровень воды над плотиной?

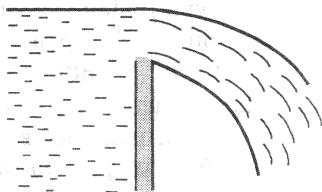


Рис. 18

63. Многие из вас замечали, что в тот момент, когда вы ступаете на мокрый песок, он светлеет. Это связано с тем, что песок становится суше. Но как только

вы убираете ногу, след, оставленный ногой, немедленно заполняется водой. Объясните это явление.

64. Под открытым водопроводным краном стоит наполняющаяся водой ванночка. В ванночку под струю воды помещают легкий шарик. Останется ли шарик под струей?

65. Почему почти одним и тем же движением губ при выдохе можно согреть руки и охладить чай?

66. Почему «кочуют» песчаные дюны?

67. При испытании реактивного снаряда, установленного в хвосте самолета для защиты его от нападения сзади, был обнаружен удивительный факт. При пуске снаряда он разворачивался и догонял самолет. Как можно объяснить это явление?

68. Почему реки, текущие даже по совершенно плоской однородной почве, изгибаются? Для простоты рассмотрите реку, текущую вдоль экватора.

69. В воде покоится лодка. Человек, находящийся на ней, переходит с кормы на нос. Как будет двигаться лодка, если сила сопротивления при движении пропорциональна ее скорости?

ТЕПЛОТА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

70. На монете начерчена мелом прямая линия. Останется ли она прямой, если монету нагреть?

71. Свинцовый лист, покрывавший южную часть крыши Бристольского собора, за два года сполз вниз по крыше на 50 см. Сползание листа началось сразу же после того, как им была покрыта крыша. Попытка остановить сползание листа вколачиванием гвоздей в стропила не удалась, потому что сползающий лист вырывал гвозди. Крыша была не крутая, и свинцовый лист в принципе мог бы оставаться на ней, не скользя под действием силы тяжести вниз. Почему же сполз лист? Попробуйте оценить, на сколько может сползти за 10 дней свинцовый лист, если максимальная и минимальная температуры равны, соответственно, $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ и $10\text{ }^{\circ}\text{C}$, длина листа при $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ равна 1 м, угол наклона крыши 30° , коэффициент трения листа о стропила 0,7, коэффициент линейного расширения свинца $3 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$.

72. Запах пахучих веществ распространяется обычно по комнате благодаря конвекции. Однако в совершенно спокойной атмосфере возможна и диффузия, связанная с беспорядочным движением молекул. За счет диффузии происходят многие процессы в жидкостях, кристаллах и газах. Как быстро происходит диффузия? Скажем, если запах пахучего вещества распространился на 1 м за 3,5 минуты, то за какое время он распространится на 10 м? Как диффузия зависит от температуры?

73. Полость колбы литрового термоса заполнена гелием, давление которого при комнатной температуре равно 10^{-5} атм

(1Н/м^2). При этом давлении длина свободного пробега молекул газа велика по сравнению с расстоянием между стенками колбы. Оцените время, за которое чай в таком термосе остынет от 90°С до 80°С .

74. Спутник Земли радиусом 2 м наполнен смесью кислорода и азота, причем масса азота составляет 75% от массы всего газа. Микрометеорит пробивает в спутнике отверстие площадью 1 см^2 . За какое время давление в спутнике уменьшится на 5%, если температура в спутнике комнатная?

75. Найдите скорость испарения воды с единицы площади поверхности в вакууме при температуре 20°С . Давление насыщенных паров при этой температуре равно $2,3\text{ кПа}$.

76. Было обнаружено, что в запаянной U-образной трубке уровни воды в обоих коленах трубки остаются на одинаковой высоте и при наклоне трубки. Что находится в коленах трубки над поверхностью воды?

77. В закрытом сосуде имеется несколько капель жидкости разной величины. Что произойдет с ними через достаточно продолжительное время?

78. Под стеклянным колпаком, из которого выкачан воздух, находится кювета с водой. В ней вертикально установлена капиллярная трубка. Известно, что давление насыщенных паров над вогнутой поверхностью жидкости несколько меньше, чем над плоской поверхностью. Поэтому можно предположить, что жидкость в трубке будет испаряться и конденсироваться на поверхности воды в кювете. Образовавшийся поток пара можно использовать для приведения в движение вертушки. Все ли верно в приведенном рассуждении?

79. Хватит ли мощности гидроэлектростанции, чтобы испарить воду, проходящую через ее турбины?

80. Почему пар обжигает сильнее воды той же температуры?

81. Электрическим кипятильником мощностью 500 Вт нагревают воду в кастрюле. За две минуты температура воды увеличилась от 85°С до 90°С . Затем кипятильник выключили, и за одну минуту температура воды упала на один градус. Сколько воды находится в кастрюле? Удельная теплоемкость воды $4,2 \cdot 10^3\text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$.

82. Волейбольный мяч массой 200 г и объемом 8 л накачан до избыточного давления $0,2\text{ атм}$. Мяч был подброшен на высоту 20 м и после падения на твердый грунт подскочил почти на ту же высоту. Оцените максимальную температуру

воздуха в мяче в момент удара о грунт. Температура наружного воздуха 300 К, теплоемкость воздуха при постоянном объеме 0,7 кДж/(кг · К).

83. Влажный воздух, который переносится ветром, дующим с побережья Тихого океана через вершину Кордильер, адиабатно расширяется, поднимаясь вверх, и охлаждается. При этом пары, находящиеся в воздухе, выпадают в виде осадков. Оцените, на сколько отличаются температуры у подножья по обе стороны Кордильер, если у побережья влажность 60%, а температура 25 °С. При такой температуре давление насыщенных водяных паров составляет 3,4 кПа.

84. Почему, когда в жаркий день вы входите в воду, вода кажется холоднее воздуха, а когда выходите, то наоборот?

85. Почему тонкая медная проволока плавится в пламени газовой печи, в то время как медный гвоздь даже не раскаляется докрасна?

86. Почему опытные хозяйки предпочитают жарить на чугунных, а не на алюминиевых сковородах?

87. Почему металлические предметы, находящиеся в комнате, на ощупь кажутся холоднее, чем деревянные?

88. Почему измерение температуры медицинским термометром продолжается долго, а «стряхнуть» его можно практически сразу же после измерения температуры?

89. Каждый квадратный метр поверхности тела, нагретого до температуры T , излучает в единицу времени энергию σT^4 , где σ — постоянная, равная $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$. На каком расстоянии от Солнца расплавится железный космический корабль, если плотность потока солнечного излучения (мощность, проходящая через единицу площади) на орбите Земли $1400 \text{ Вт}/\text{м}^2$? Температуру плавления железа принять равной 1535 К, расстояние от Земли до Солнца $1,5 \cdot 10^{11} \text{ м}$.

90. На брусок льда надета проволочная петля, к нижней части которой подвешен груз. Проволока начинает сравнительно быстро разрезать лед, так как он плавится под проволокой и вновь смерзается над ней. Это происходит от того, что при повышении давления температура плавления льда понижается, и лед под проволокой оказывается при температуре более высокой, чем температура плавления льда при повышенном давлении. Однако если петлю сделать из капроновой нити того же диаметра, то лед практически не режется. Почему?

91. Оцените максимальную толщину ледника.

92. При неправильной регулировке двигателя внутреннего сгорания иногда вместо сравнительно медленного сгорания горючей смеси начинается так называемая детонация, при которой смесь сгорает быстро, со взрывом. Почему при этом падает КПД двигателя?

93. Для отопления здания используется тепло, которое отдается воздуху при работе теплового двигателя. Этот двигатель приводит в действие холодильную машину, которая отнимает тепло от грунтовых вод и отдает его воздуху в комнате. Определите теоретический КПД такого цикла отопления, если температура в котле теплового двигателя 210°C , температура воды в батарее 60°C , а температура грунтовых вод 10°C .

94. Почему брезентовая палатка хорошо защищает от дождя, но если во время дождя к потолку палатки притронуться рукой, потолок начинает протекать?

95. Два мыльных пузыря с радиусами r_1 и r_2 сливаются в один пузырь радиусом r_3 . Найдите атмосферное давление, если поверхностное натяжение мыльной пленки σ .

96. Сложенные вместе смоченные оконные стекла практически невозможно отделить друг от друга, если пытаться оторвать одно стекло от другого. Почему?

97. На поверхности воды плавают две спички, которые предварительно до половины были опущены в парафин. Оказалось, что как чистые, так и покрытые парафином концы спичек притягиваются между собой, а «разноименные» концы отталкиваются. Почему?

98. В сосуд с водой опускают Г-образный стеклянный капилляр радиусом $0,5\text{ мм}$ (рис.19). Температурный ход коэффициента поверхностного натяжения показан на рисунке 20. В каком диапазоне температур вода вытечет из сосуда?

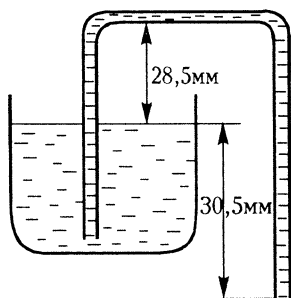


Рис. 19

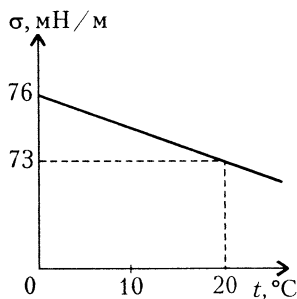


Рис. 20

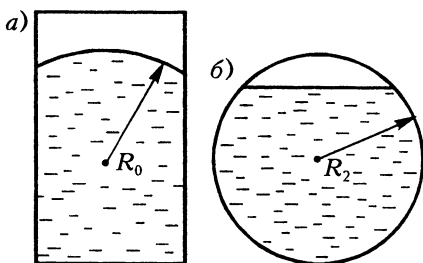


Рис. 21

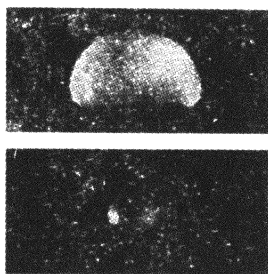


Рис. 22

на сдобную булочку (рис.22). Почему капля принимает такую форму? Оцените максимальный размер капель.

99. В условиях невесомости жидкость, помещенная в стеклянный цилиндрический сосуд с радиусом основания R_1 , приняла форму, показанную на рисунке 21,а. Свободная поверхность жидкости имела форму сферы радиусом R_0 . Та же жидкость, помещенная

в стеклянный сферический сосуд радиусом R_2 на Земле, приняла форму, показанную на рисунке 21,б; при этом свободная поверхность жидкости была плоской. Определите высоту уровня жидкости в сферическом сосуде. Какую форму будет иметь жидкость в сферическом сосуде, если радиус сосуда больше или меньше R_2 ?

100. Говоря о хорошо обтекаемом теле, имеют в виду, что оно имеет каплевидную форму. Однако мгновенные фотографии падающих капель показывают, что маленькие капли сферичны, а большие похожи

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

101. Внутри гладкой сферы находится маленький заряженный шарик. Какой величины заряд нужно поместить в нижней точке сферы для того, чтобы шарик удерживался в ее верхней точке? Диаметр сферы d , заряд шарика q , его масса m .

102. Подсчитайте среднюю плотность электрических зарядов в атмосфере, если известно, что напряженность электрического поля вблизи поверхности Земли равна 100 В/м, а на высоте 1,5 км эта напряженность падает до 25 В/м.

103. При какой разности потенциалов между электродами зажигается неоновая лампочка, если энергия ионизации неона 21,5 эВ, а среднее расстояние между двумя последовательными столкновениями электрона с атомами газа 0,4 мкм?

Электроды имеют вид больших пластинок, расположенных на расстоянии 3 мм друг от друга.

104. Найдите заряд заземленного металлического шара радиусом r , если на расстоянии l от его центра находится точечный заряд q .

105. В однородном заряженном шаре имеется сферическая полость, центр которой находится на расстоянии a от центра шара. Найдите напряженность электрического поля в различных точках полости, если плотность заряда шара ρ .

106. Какую наибольшую разность потенциалов можно получить, имея батарейку с ЭДС \mathcal{E} и два одинаковых конденсатора?

107. Между каждой парой из n данных точек включен конденсатор емкостью C . Чему будет равна емкость между двумя произвольными точками?

108. Шар, изготовленный из твердого диэлектрика, поместили в однородное электрическое поле напряженностью \vec{E}_0 . При этом диэлектрик оказался полностью поляризованным. Воспользовавшись принципом суперпозиции, найдите напряженность электрического поля в центре шара и в точках на расстоянии r от центра шара (r меньше радиуса шара). Молекулы диэлектрика можно представить как гантели длиной l с зарядами $+q$ и $-q$ на концах. Число молекул в единице объема n .

109. Имеется равномерно заряженный отрезок AB . Докажите, что напряженность электрического поля, создаваемого этим отрезком в точке C , направлена по биссектрисе треугольника ABC .

110. Между пластинами замкнутого плоского конденсатора находится точечный заряд q . Площадь пластин бесконечно велика, расстояние между ними d . Первоначально заряд находился на расстоянии $d/3$ от левой пластины. Какой заряд пройдет по проводнику, замыкающему пластины конденсатора, при перемещении заряда q в новое положение на расстоянии $d/3$ от правой пластины?

111. Для определения небольших емкостей иногда пользуются мостиковой схемой, изображенной на рисунке 23. Язычок переключателя колеблет-

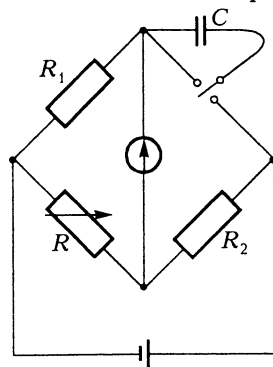


Рис. 23

ся с частотой ν . Какова емкость C , если сопротивление переменного резистора R , а постоянных R_1 и R_2 ? Стрелка гальванометра не отклоняется.

112. Схему, изображенную на рисунке 24, применяют обычно для измерения неизвестного сопротивления R_x . Как, используя подобную схему, измерить сопротивление r самого гальванометра, если второго гальванометра нет?

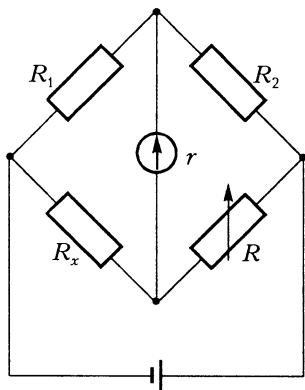


Рис. 24

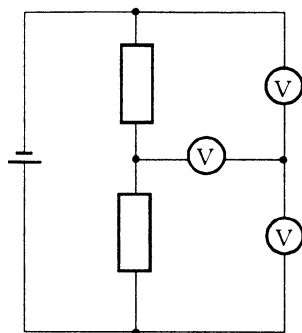


Рис. 25

113. В схеме (рис.25) все вольтметры одинаковые. ЭДС батареи 5 В, ее внутреннее сопротивление малое. Верхний вольтметр показывает 2 В. Что показывают остальные вольтметры?

114. В схеме, изображенной на рисунке 26, вольтметр измеряет напряжение на резисторе сопротивлением 300 кОм. Каким должно быть сопротивление вольтметра для того, чтобы его показания отличались не более чем на 2% от действительного значения U_R ?

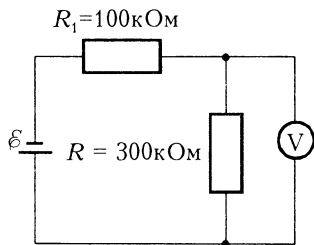


Рис. 26

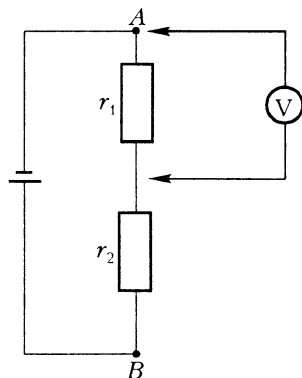


Рис. 27

115. Если вольтметр подключен параллельно верхнему резистору сопротивлением r_1 (рис.27), то он показывает 6 В, если параллельно нижнему резистору сопротивлением r_2 – то 4 В, а если его подключить к точкам A и B , то он покажет 12 В. Каковы в действительности напряжения на резисторах?

116. Как измерить величину неизвестного сопротивления, имея вольтметр и амперметр с неизвестными внутренними сопротивлениями?

117. На рисунке 28 изображены схемы для измерения сопротивления резистора с помощью амперметра и вольтмет-

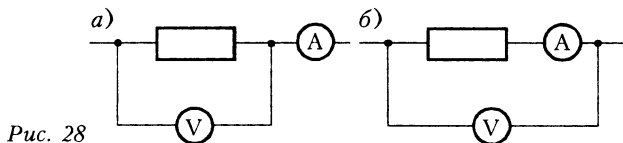


Рис. 28

ра. По какой схеме выгоднее включить приборы, чтобы измерить сопротивление более точно?

118. На рисунке 29 приведена зависимость тока через автомобильную лампочку от напряжения на ней. Лампочку

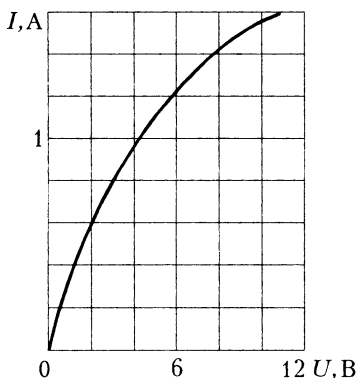


Рис. 29

включают в цепь, показанную на рисунке 30. Найдите мощность, выделяющуюся на лампочке.

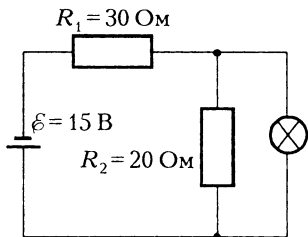
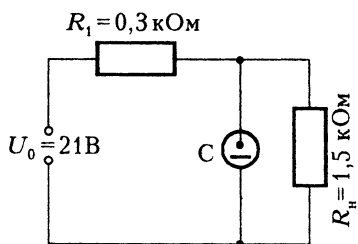
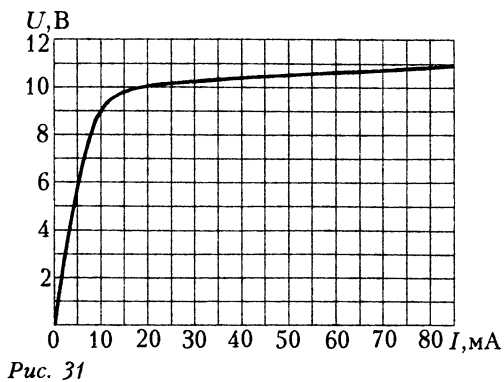


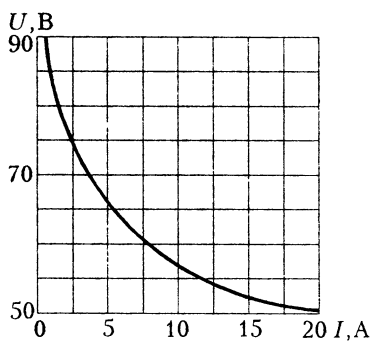
Рис. 30

119. На рисунке 31 приведена вольт-амперная характеристика стабилотрона C . Каким будет напряжение на нагрузке в цепи, показанной на рисунке 32? Как будет меняться напряжение U_0 источника при изменении напряжения на грузки на 10%?

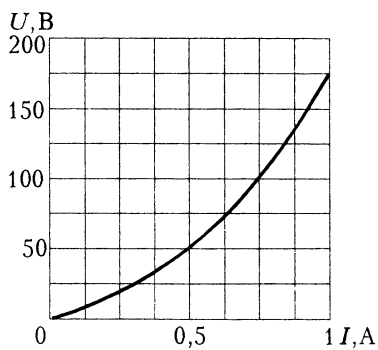
120. На рисунке 33 показана вольт-амперная характеристика дуги. Каким будет ток в цепи, если дугу подключить к



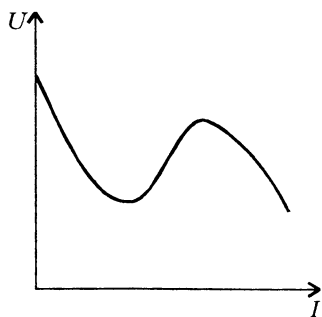
Puc. 32



Puc. 33



Puc. 34



Puc. 35

источнику напряжения 80 В последовательно с резистором, сопротивление которого 500 Ом?

121. Можно ли две лампочки мощностью 45 Вт и 75 Вт, рассчитанные на напряжение 127 В, включить последовательно в сеть напряжением 220 В, если допустимо перенапряжение не более 10%? Вольт-амперная характеристика лампы мощностью 75 Вт приведена на рисунке 34.

122. Источник электроэнергии имеет вольт-амперную характеристику, показанную на рисунке 35 (U – напряжение на источнике, I – ток, текущий через него). Опишите, как будет меняться напряжение на резисторе, на который замкнут источник, при изменении величины сопротивления этого резистора.

123. Для питания прибора напряжение на его входе нужно устанавливать как можно точнее. Для этого используются два реостата, соединенных так, как показано на рисунке 36. Длины реостатов одинаковы, а сопротивление одного из них в 10 раз больше сопротивления другого. Как поступить, чтобы установить напряжение как можно точнее? Во сколько раз точность установки напряжения будет меньше, если использовать лишь один реостат? Как включить реостаты, если для питания приборов нужно устанавливать поточнее не напряжение, а ток?

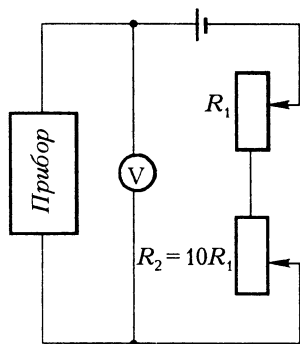


Рис. 36

124. Если терморегулятор электрического утюга поставлен в положение «капрон», то утюг периодически включается на 10 с и выключается на 40 с. Поверхность утюга при этом нагревается до температуры 100 °С. Если терморегулятор поставить в положение «хлопок», то утюг периодически включается на 20 с и выключается на 30 с. Определите установившуюся температуру поверхности утюга в этом положении терморегулятора. Найдите, до какой температуры нагреется включенный утюг, если терморегулятор выйдет из строя. Считайте, что теплоотдача пропорциональна разности температур утюга и окружающего воздуха. Температура в комнате 20 °С.

125. Длина нити накаливания электрической лампочки l , а диаметр нити d . Какими должны быть длина l_1 и диаметр d_1

нити лампочки, рассчитанной на то же напряжение сети, но с вдвое большим световым потоком, если КПД обеих лампочек одинаковы и нити сделаны из одного и того же материала?

126. К середине проволоки, натянутой между двумя опорами, подвешивается груз. Почему при подключении концов проволоки к источнику напряжения груз начинает колебаться и эти колебания не затухают до тех пор, пока проволока замкнута на источник?

127. Удельная теплота сгорания водорода 119700 кДж/кг . При каком минимальном напряжении на электродах может происходить электролиз воды?

128. При измерении ЭДС старой батарейки для карманного фонарика вольтметр показал $4,3 \text{ В}$, однако лампочка от этой батарейки не горит. Почему?

129. Для получения мощных световых импульсов через газоразрядную лампу разряжают батарею конденсаторов большой емкости, заряженную до разности потенциалов U . Почему для этой же цели обычно не используется батарея гальванических элементов с ЭДС, равной U ?

130. Почему лампочка накаливания сгорает обычно при включении?

131. В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d помещен в поток проводящей жидкости с удельным сопротивлением ρ . Жидкость движется с постоянной скоростью v параллельно пластинам. Конденсатор находится в магнитном поле с индукцией \vec{B} , направленной перпендикулярно скорости жидкости и параллельно плоскости пластин. Какая мощность выделяется во внешней цепи, имеющей сопротивление R ?

132. Электронно-лучевая трубка с ускоряющим напряжением U помещена в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} , направленной вдоль оси трубки. На экране при этом наблюдается небольшое расплывчатое пятно. Если менять величину индукции, то можно заметить, что при некоторых значениях $B_0, 2B_0, 3B_0, \dots$ электронное пятно фокусируется – собирается в точку. Объясните это явление. Как с помощью такого эксперимента определить отношение заряда электрона к его массе?

133. В камере ускорителя по окружности радиусом R движется очень тонкий пучок протонов. Величина тока в начальный момент I_0 , полное число частиц в камере n .

Магнитный поток через неизменяющуюся орбиту пучка изменяется с постоянной скоростью Φ . Какой станет величина тока после того, как частицы сделают один оборот? Скорость частиц остается много меньше скорости света.

134. Две сверхпроводящие катушки с индуктивностями L_1 и L_2 соединены параллельно. Какими будут максимальные токи в катушках, если параллельно им подключить конденсатор емкостью C , предварительно заряженный до напряжения U ?

135. Две длинные однослойные сверхпроводящие катушки с числами витков n_1 и n_2 , длинами l_1 и l_2 и сечениями S_1 и S_2 соединены параллельно при помощи сверхпроводящих проводов. Определите, как распределится между ними ток I , подведенный от общего источника. Катушки удалены друг от друга так, что поле одной не действует на поле другой. Индукция магнитного поля в катушке пропорциональна току и числу витков на единицу длины катушки.

136. Почему трансформатор выходит из строя в том случае, если хотя бы один виток обмотки замкнется накоротко?

137. Имеются два одинаковых идеальных трансформатора с коэффициентом трансформации 1:3. Первичная обмотка одного из них последовательно соединена со вторичной обмоткой второго, а свободные концы этих обмоток включены в сеть переменного тока с напряжением 100 В. Вторичная обмотка первого трансформатора последовательно соединена с первичной обмоткой второго. Определите амплитуду переменного напряжения между свободными концами этих обмоток.

138. Если на первичную обмотку ненагруженного трансформатора подать напряжение 220 В, то напряжение на вторичной обмотке будет 127 В. Какое напряжение будет на нагрузке сопротивлением 10 Ом, подключенной ко вторичной обмотке этого трансформатора? Активное сопротивление первичной обмотки трансформатора 2 Ом, а вторичной 1 Ом. Внутреннее сопротивление генератора тока принять равным нулю.

139. До какой разности потенциалов зарядится конденсатор емкостью C (рис.37), если замкнуть ключ K ? ЭДС батареи \mathcal{E} , внутреннее сопротивление батареи и сопротивление проводов пренебрежимо малы. Диод можно считать

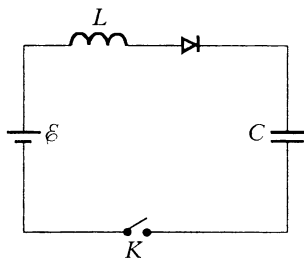


Рис. 37

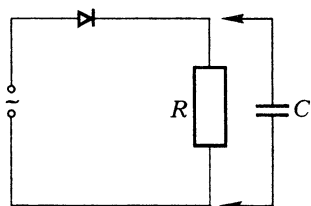


Рис. 38

идеальным, т.е. в прямом направлении его сопротивление ничтожно мало, в обратном – бесконечно велико. Индуктивность катушки L достаточно велика, так что процесс зарядки идет медленно.

140. На рисунке 38 показана простейшая схема выпрямителя.

Диод считается идеальным. Во сколько раз изменится мощность, выделяемая на резисторе R , при подсоединении параллельно ему конденсатора C такой емкости, что за период колебаний напряжения сети (220 В, 50 Гц) заряд конденсатора практически не меняется?

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

141. К стенке, наклоненной под углом α к вертикали (рис.39), подвешен маятник длиной l . Маятник отклонили в плоскости, перпендикулярной стенке, на небольшой угол β от вертикального положения и отпустили. Найдите период колебаний маятника, если $\alpha < \beta$ и удар шарика о стенку абсолютно упругий.

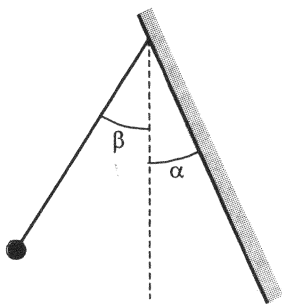


Рис. 39

142. Определите период колебаний полярной молекулы в однородном электрическом поле, напряженность которого 300 В/см. Полярную молекулу можно представить в виде жесткой гантели длиной 10^{-8} см, на концах которой находятся две материальные точки массой 10^{-24} г,

несущие на себе заряды $\pm 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

143. Модель молекулы CO_2 представляет собой три шарика, соединенных пружинками и расположенных в положении равновесия вдоль одной прямой (рис.40). Такая молекула может совершать колебания разных типов а) и б). Найдите отношение частот этих колебаний.

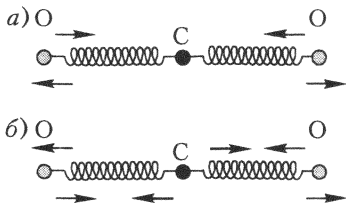


Рис. 40

144. Колонна одинаковых

грузовых автомобилей подъезжает к складу, забирает груз и движется дальше с той же скоростью. В результате продольный профиль грунтовой дороги принял вид, показанный на рисунке 41. В каком направлении двигались автомобили?

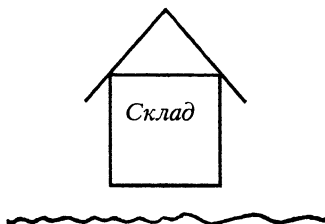


Рис. 41

145. На горизонтальную мембрану насыпан мелкий песок.

Мембрана совершает колебания с частотой 500 Гц в вертикальной плоскости. Какова амплитуда колебаний мембраны, если песчинки подскакивают на высоту 3 мм по отношению к положению равновесия мембраны?

146. Доска массой M расположена горизонтально и опирается на два вращающихся цилиндра. Расстояние между осями цилиндров l . Коэффициент трения между доской и цилиндрами μ . Докажите, что, если доску, находящуюся в положении равновесия, слегка толкнуть в горизонтальном направлении, она будет совершать гармонические колебания, и найдите период этих колебаний. Каким будет движение доски, если изменить направления вращения цилиндров на противоположные?

147. Точка подвеса математического маятника длиной l совершает горизонтальные колебания такие, что ее координата x меняется со временем t по закону $x = a \cos \omega t$. Считая колебания маятника малыми, найдите амплитуду и фазу вынужденных колебаний маятника.

148. Если длину математического маятника уменьшать, когда маятник проходит положение равновесия, и увеличивать, когда его отклонение максимально, то амплитуда колебаний маятника начнет нарастать. Почему?

149. В цилиндрический конденсатор в точке A впускается слегка расходящийся пучок положительных ионов с малым углом раствора α (рис. 42). Все ионы в пучке имеют одинаковую энергию. Те ионы, у которых вектор скорости в точке A направлен перпендикулярно отрезку OA , движутся по окружности радиусом $r_0 = OA$, concentрической с обкладками конденсатора. Докажите, что пучок ионов будет фокусироваться в точке B такой, что

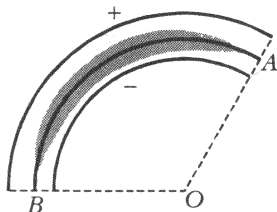


Рис. 42

угол AOB составляет $\pi/\sqrt{2}$. Определите максимальную ширину пучка.

150. Читая лекции в Страсбурге в 1908 году, академик Л.И.Мандельштам поражал аудиторию следующим красивым опытом. Он брал два камертона, укрепленных на резонансных ящиках и настроенных на близкие частоты, ставил их рядом друг с другом и возбуждал один из камертонов. Второй камертон не отзывался на его колебания. Но стоило начать периодически закрывать ящик возбужденного резонатора рукой, как второй камертон начинал громко звучать. Объясните этот опыт.

151. При передаче телевизионного изображения на Земле за 1 с передается 25 кадров. Это означает, что 1 кадр передается за $1/25$ с. В то же время, как известно, передача одного кадра изображения Луны советской автоматической станцией «Луна» длилась 25 мин. Почему так велика разница во временах передачи кадра в обоих случаях?

152. Упрощенно атом гелия можно представлять как систему, в которой два электрона совершают колебания около общего центра – неподвижного ядра. Используя эту модель, попробуйте оценить приблизительно диэлектрическую проницаемость жидкого гелия в постоянном электрическом поле, принимая во внимание, что гелий сильно поглощает ультрафиолетовое излучение на длине волны 0,06 микрон. Плотность жидкого гелия $0,14 \text{ г/см}^3$.

153. На фотографии летящей пули (рис.43) видны звуковые волны, которые возбуждаются при движении пули. (Такую фотографию удалось получить благодаря тому, что области, в которых плотности воздуха различны, по-разному преломляют световые лучи.) Воспользовавшись линейкой,

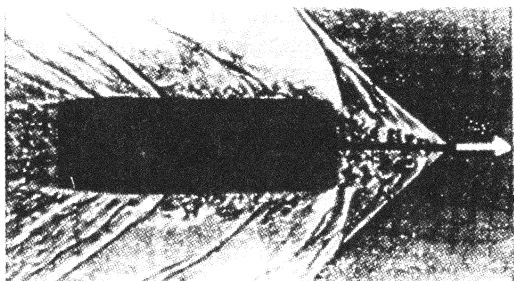


Рис. 43

определите примерную скорость пули. Скорость звука в воздухе 340 м/с.

154. Подводная лодка плывет на глубине 500 м. На каком расстоянии от лодки (вдоль поверхности океана) гидроакустик на лодке может обнаружить приближающийся корабль, если скорость звука в воде уменьшается с глубиной на 4 м/с каждые 100 м, а у поверхности океана она равна 1500 м/с. (Изменение скорости звука с глубиной связано с изменением температуры воды и ее плотности.)

ОПТИКА

155. Перед зеркалом стоит человек, закрыв один глаз. Изображение этого глаза в зеркале он закрывает, приклеивая бумажку. Что увидит человек, если он закроет открытый глаз и откроет закрытый?

156. В боковой стенке сосуда, наполненного жидкостью с показателем преломления n , проделано отверстие небольшого радиуса r . По оси отверстия из сосуда направляют горизонтально тонкий луч света. До какого уровня над отверстием должна вытечь жидкость, чтобы луч света вышел из струи, ни разу не испытав полного внутреннего отражения? Изменением поперечного сечения струи пренебречь, показатель преломления жидкости считать достаточно большим.

157. Почему возникает «лунная дорожка» на поверхности водоема в ясную лунную ночь?

158. Матированное стекло (одна из поверхностей стекла гладкая, другая шероховатая) прикладывают к чертежу один раз гладкой поверхностью кверху, другой раз – книзу. В одном случае чертеж виден хорошо, в другом – разобрать его невозможно. Почему?

159. В дымовой завесе из непрозрачных частиц радиусом 5 мкм при содержании массы вещества 0,04 г в кубометре воздуха дальность видимости составляет 50 м. Сколько вещества в кубометре воздуха распыляется другим источником завесы, который создает частицы радиусом 10 мкм, если видимость сокращается до 20 м?

160. На рисунке 44 отрезок $A'B'$ – действительное изображение источника AB , полученное с помощью линзы. Фотоаппарат помещают в точках 1, 2 или 3. Какие части источника получают при этом на

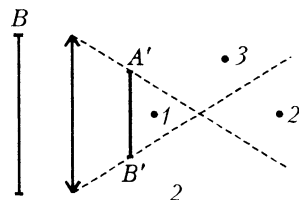


Рис. 44

фотографиях? Диаметр объектива фотоаппарата мал по сравнению с диаметром линзы. Фотоаппарат «наводится» на плоскость $A'B'$.

161. Какие очки следует прописать человеку, если в воде он видит нормально?

162. На рисунке 45 показано положение двух точек A и B и их изображений A' и B' , которые получены с помощью линз. Найдите построением положения линз и их фокусные расстояния.

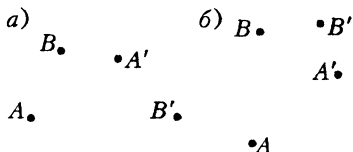


Рис. 45

163. Почему лицо фехтовальщика в проволочной маске не видно публике, а спортсмен видит все так же хорошо, как и без маски?

164. Почему при ярком освещении те, кто пользуются не очень сильными очками, могут читать и без очков? Почему, для того чтобы сфотографировать одновременно два объекта, один из которых находится дальше другого, и получить на фотопленке резкое изображение обоих объектов, обычно уменьшают диаметр отверстия объектива (объектив диафрагмируют)?

165. Почему днем окна домов кажутся темными?

166. Почему рыбу, плавающую в реке, лучше видно с моста, чем с низкого берега?

167. Определите, во сколько раз изменится освещенность изображения Солнца, полученного плосковыпуклой линзой, если линзу разрезать по диаметру и сложить плоскими сторонами?

168. Для выжигания по дереву сфокусированными солнечными лучами необходимо иметь линзу с отношением диаметра D к фокусному расстоянию F , большим 0,07. Оцените, сколько горожан нужно было Архимеду выстроить на крепостной стене для того, чтобы они могли поджечь римский корабль, направив в одну точку корабля солнечные лучи с помощью плоских зеркал диаметром 1 м, если корабль подошел к берегу на расстояние 200 м.

169. Почему лампочки обычно окружают матовым колпаком?

170. Во сколько раз освещенность в полнолуние меньше, чем в солнечный день? Высоты Луны и Солнца над горизонтом одинаковы. Считать, что Луна рассеивает 0,1 падающего на нее светового потока равномерно по всей полусфере.

Принять расстояние от Луны до Земли равным 400000 км, радиус Луны 2000 км.

171. Почему цепочка фонарей кажется одинаково яркой вдоль ее длины?

172. В полый сфере проделано отверстие, через которое проникает луч света. Внутренняя поверхность сферы отражает свет во все стороны одинаково (диффузно) и не поглощает его. Как будет отличаться освещенность точки, диаметрально противоположной отверстию, от освещенности остальных точек сферы?

173. Жука фотографируют в двух масштабах: с расстояния $3F$, где F – фокусное расстояние объектива, и с расстояния $5F$. Во сколько раз надо изменить диаметр диафрагмы объектива, чтобы освещенность изображения на пленке в обоих случаях была одной и той же? Считать, что диаметр объектива в обоих случаях много меньше F .

174. При наблюдении в телескоп яркие звезды видны даже днем. Объясните, почему. При наблюдении в телескоп освещенность изображения звезды в 10 раз меньше освещенности поверхности дневного неба, рассматриваемого в тот же телескоп. Во сколько раз нужно увеличить диаметр объектива, чтобы освещенность изображения звезды стала в 10 раз больше освещенности неба?

175. Инфракрасное излучение определенной длины волны поглощается метаном (CH_4). При нормальных условиях слой чистого метана толщиной 1 см поглощает 98% энергии излучения. Во сколько раз ослабится такое излучение при прохождении по вертикали атмосферы Земли? При расчете долю метана в атмосфере принять равной $1,4 \cdot 10^{-6}$.

1. Изображения колес поворачиваются на 1 оборот за время прохождения 4 кадров в проекторе. Поэтому на каждом кадре колесо должно быть повернуто по сравнению с предыдущим на $1/4$ оборота. Колеса на экране вращаются «вперед», если скорость движения автомобиля такова, что за время между кадрами $\tau = 1/16$ с колеса автомобиля делают n полных и еще $1/4$ оборота вокруг своей оси. Если же за время τ колеса делают n полных и еще $3/4$ оборота вокруг оси, то изображения колес на экране будут вращаться «назад». Таким образом, угловая скорость вращения колес равна $\omega_1 = 32\pi(n + 1/4)$ или $\omega_2 = 32\pi(n + 3/4)$. Это означает, что оси колес, а вместе с ними и автомобиль, движутся со скоростью $v_1 = 32(n + 1/4)\pi R$ (тогда изображения колес вращаются «вперед») или со скоростью $v_2 = 32(n + 3/4)\pi R$ (в этом случае изображения колес вращаются «назад»). Подставляя в эти формулы $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, мы будем получать ответы

$$v_1 = 12,6 \text{ м/с} = 45 \text{ км/ч}, v_1 = 223 \text{ км/ч} \dots$$

или

$$v_2 = 136 \text{ км/ч}, v_2 = 316 \text{ км/ч} \dots$$

При этом, поскольку скорость автомобиля вряд ли больше 140 км/ч , она равна 45 км/ч , если изображения колес вращаются «вперед», или 136 км/ч , если колеса на экране вращаются «назад».

2. Совместим какие-нибудь зубья гребенок (рис.46). Тогда следующие зубья будут находиться на расстоянии $1/5 \text{ см} - 1/6 \text{ см} =$

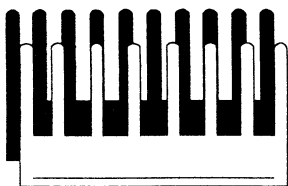


Рис. 46

$= 1/30 \text{ см}$ друг от друга. Сместим подвижную гребенку на это расстояние. Картина светлых и темных полос сместится на период неподвижной гребенки, т.е. на $1/5 \text{ см}$. Тогда светлые и темные места будут перемещаться со скоростью $v = (1/5 : 1/30) \cdot 1 \text{ см/с} = 6 \text{ см/с}$ при скорости движения гребенки 1 см/с .

Опыт с гребенками позволяет увидеть, что происходит при сложении волн с различными длинами волны λ_1 и λ_2 и разными

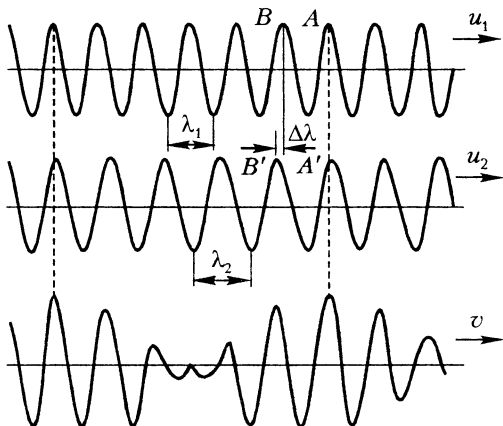


Рис. 47

скоростями распространения (фазовыми скоростями) u_1 и u_2 . В результате сложения синусоидальных волн получается не синусоидальная волна (рис.47). Скорость ее распространения v — это скорость перемещения повторяющейся группы горбов и впадин. Ее называют групповой скоростью. Найдем v . В системе отсчета, движущейся со скоростью u_1 , вторая волна движется со скоростью $u'_2 = u_2 - u_1$. Если в некоторый момент совпадают горбы A и A' , то через некоторое время τ совпадут горбы B и B' . В результате группа волн переместится влево на λ_1 . Следовательно, она перемещается со скоростью λ_1/τ . Но $\tau = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{u_2 - u_1}$. Поэтому

$$\frac{\lambda_1}{\tau} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (u_2 - u_1). \text{ В неподвижной системе отсчета}$$

$$v = u_1 - \frac{\lambda_1}{\tau} = u_1 - \lambda_1 \frac{\Delta u}{\Delta \lambda} = \frac{\lambda_2 u_1 - \lambda_1 u_2}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

В отсутствие дисперсии (зависимости скорости распространения волн от λ) $v = u_1 = u_2$ — групповая скорость совпадает с фазовой. При дисперсии формула для v справедлива для набора волн близких длин. Тогда $v = u - \frac{du}{d\lambda} \lambda$. Эта формула позволяет, например, найти скорость распространения модуляции амплитудно-модулированной волны, групповую скорость распространения волн в воде (волн в океане) и т.д.

3. Время полета $t = \Delta v_y / g$, где Δv_y — изменение проекции скорости тела на вертикальную ось Y . Нетрудно найти Δv_y графически, построив в произвольном масштабе вектор v_A (направлен-

ный по касательной к траектории в точке A) и затем вектор \vec{v}_B , воспользовавшись тем, что $v_x = \text{const}$ (рис.48). После этого можно с помощью линейки найти Δv_y и вычислить t . В нашем случае $\Delta v_y \approx 27 \text{ м/с}$ и $t \approx 2,9 \text{ с}$.

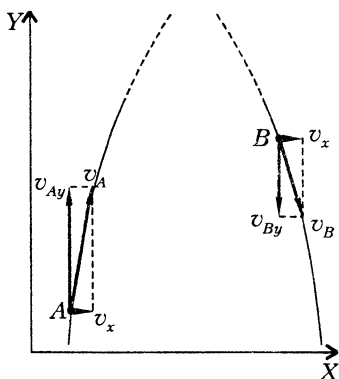


Рис. 48

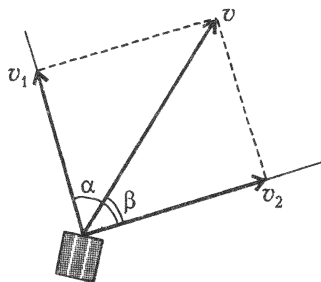


Рис. 49

4. Скорость \vec{v} ящика, конечно, не равна $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, но она такова, что ее проекции на направления канатов равны v_1 и v_2 соответственно. Поэтому конец вектора \vec{v} лежит на пересечении перпендикуляров к векторам \vec{v}_1 и \vec{v}_2 (рис.49).

Из рисунка видно, что $v_1 = v \cos(\alpha - \beta)$ и $v_2 = v \cos \beta$, так что

$$\frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} = \frac{v_2}{v_1}, \quad \frac{1}{\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{v_1}{v_2} - \cos \alpha \right) = \frac{v_1}{v_2 \sin \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha,$$

и

$$v = \frac{v_2}{\cos \beta} = v_2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}.$$

5. Катер и спортсмен на лыжах связаны нерастяжимой веревкой. Поэтому проекции скоростей катера и спортсмена на направление веревки должны быть равны (в противном случае смещения концов веревки вдоль ее направления были бы не одинаковы, и веревка разорвалась бы). Из рисунка 50 видно, что это приводит к ограничению

$$v_1 \cos \alpha = v_2 \cos \beta.$$

При $\alpha > \beta$ скорость лыжника \vec{v}_1 будет по модулю больше скорости

катера \vec{v}_2 . (Например, когда направление веревки совпадает с направлением скорости катера, а лыжник движется под углом.)

6. Решим эту задачу, используя понятие «мгновенная ось вращения». Напомним, что так называют ось, относительно которой движение тела в данный момент времени сводится к чистому вращению. (Например, для катящегося колеса эта ось в каждый момент проходит через точку касания колеса с землей.) Такая ось существует всегда, если движение не является чисто поступательным. Для нахождения мгновенной оси используем то свойство, что скорость любой точки вращающегося тела перпендикулярна линии, соединяющей эту точку с осью. Поскольку скорости точек A и B перпендикулярны нитям (нити нерастяжимы), то мгновенная ось находится на пересечении нитей – в точке O_1 (рис.51). Центр диска

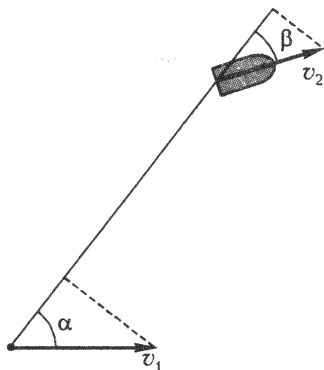


Рис. 50

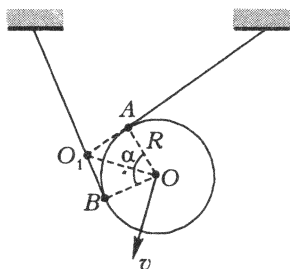


Рис. 51

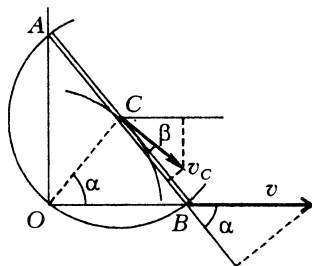


Рис. 52

O находится от мгновенной оси на расстоянии $r = R/\cos(\alpha/2)$, его скорость перпендикулярна O_1O и равна

$$v = \omega r = \frac{\omega R}{\cos(\alpha/2)}.$$

7. Точка O представляет собой вершину прямого угла, опирающегося на диаметр окружности радиусом $l/2$ с центром в точке C (рис.52). Следовательно, OC – радиус этой окружности. Это означает, что при движении стержня длина отрезка OC не меняется и точка C движется по окружности с центром в точке O и радиусом $OC = l/2$.

Скорость \vec{v}_C точки C направлена по касательной к траектории и перпендикулярна OC . Так как стержень нерастяжим, то проекции скоростей точек C и B на направление стержня должны быть одинаковы:

$$v \cos \alpha = v_C \cos \beta.$$

Из рисунка видно, что $\beta = 2\alpha - \pi/2$. Поэтому

$$v_C = v \frac{\cos \alpha}{\cos(2\alpha - \pi/2)} = \frac{v}{2 \sin \alpha}.$$

Проекция ускорения точки C на радиус OC должна быть равна $v_C^2/OC = v^2/(2l \sin^2 \alpha)$. Но как направлен вектор \vec{a}_C ?

Заметим, что проекция скорости точки C на горизонтальную ось постоянна и равна $v/2$ – точка C всегда находится в 2 раза ближе к OA , чем точка B . Это означает, что ускорение точки C вертикально и делит угол OCB пополам. Таким образом,

$$a_C \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{v^2}{2l \sin^2 \alpha}.$$

Отсюда

$$a_C = \frac{v^2}{2l \sin^3 \alpha}.$$

8. Отметим, во-первых, что поставленный в задаче вопрос имеет смысл только при нечетном числе шестеренок – в противном случае вращение шестеренок было бы согласованным и их можно было бы поворачивать на любой угол.

Для простоты рассуждений рассмотрим кольцо из 5 шестеренок (рис. 53). Попытаемся повернуть на максимальный угол по часовой стрелке шестеренку 1. Пусть этот угол равен β . Тогда две соседние шестеренки 2 и 5 придется повернуть против часовой стрелки на угол не меньше $\beta - \alpha$, а шестеренки 3 и 4 – на угол не меньше $\beta - 2\alpha$. Но так как эти две последние шестеренки не могут повернуться относительно друг друга на угол больше α , то должно выполняться равенство $\beta - 2\alpha = \alpha/2$. Отсюда получаем $\beta = 2,5\alpha$.

Аналогично рассуждая, найдем, что для кольца из 13 шестеренок максимальный угол поворота одной из шестеренок будет равен $6,5\alpha$.

9. Москва и Новосибирск находятся на одной широте (55° северной широты), а их долготы отлича-

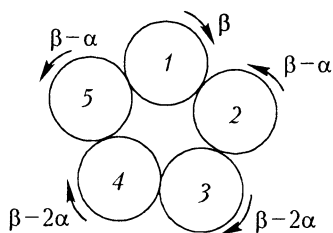


Рис. 53

ются на 45° : Москва находится на 38° , а Новосибирск – на 83° восточной долготы. За 3 часа (с 12.00 до 15.00) Земля делает $1/8$ оборота вокруг оси, и Москва в 15.00 окажется в том же положении по отношению к Солнцу и неподвижным звездам, в каком находился Новосибирск в 12.00 (в нашей задаче, очевидно, несущественно движение Земли по орбите вокруг Солнца). Следовательно, спутник делает за 3 часа целое число оборотов вокруг Земли. Так как период обращения спутника не может быть меньше чем $T_{\min} = 2\pi\sqrt{R/g} \approx 1,4$ ч, то он равен либо 3 часам, либо 1,5 часам. В обоих случаях в 18.00 спутник будет находиться над пунктом с координатами 55° северной широты и 7° западной долготы.

В 19.30 спутник окажется над пунктом с координатами 55° северной широты и 30° западной долготы, если период его обращения 1,5 часа, и над пунктом с координатами 55° южной широты и 154° восточной долготы, если его период равен 3 часам.

10. Земля обращается вокруг Солнца и вращается вокруг собственной оси, причем ось Земли почти перпендикулярна к плоскости орбиты, а направления вращения Земли вокруг своей оси и обращения вокруг Солнца совпадают. Если бы Земля не вращалась вокруг своей оси (т.е. не вращалась по отношению к далеким звездам), то любая точка на Земле была бы ориентирована одинаково по отношению к Солнцу через время, равное периоду обращения Земли вокруг Солнца. Следовательно, обращение вокруг Солнца за год прибавляет как бы один оборот к числу оборотов вокруг своей оси. Поэтому при изменении направления вращения Земли число дней в году изменилось бы на два.

11. Предположим, что расписание движения поездов четко выдерживается изо дня в день и устроено следующим образом. Пусть интервал между приходом поездов одного (любого) направления равен t , а интервал между отходом от станции поезда одного направления (например, по часовой стрелке) и отходом поезда другого направления (против часовой стрелки) равен τ . Тогда вероятность студенту сесть в поезд, идущий, в нашем предположении, против часовой стрелки, равна τ/t , а в обратном направлении – $(t - \tau)/t$. Если эти вероятности не равны друг другу, то студент будет ездить чаще в одном направлении, чем в другом.

12. В системе координат, движущейся относительно земли со скоростью \vec{v}_1 , корабль A покоится, а корабль B движется со скоростью $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ (рис.54). Минимальное расстояние между кораблями равно

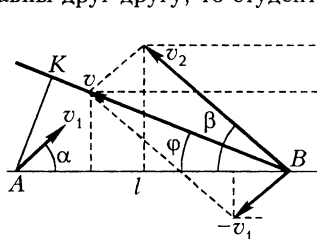


Рис. 54

длине перпендикуляра AK , опущенного на траекторию корабля B . Обозначим φ угол, образуемый вектором \vec{v} с линией BA . Тогда $AK = l \sin \varphi$. Спроектировав все векторы на линию AB и на линию, перпендикулярную AB , получим

$$v \cos \varphi = v_2 \cos \beta + v_1 \cos \alpha \quad \text{и} \quad v \sin \varphi = v_2 \sin \beta - v_1 \sin \alpha.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_2 \sin \beta - v_1 \sin \alpha}{v_2 \cos \beta + v_1 \cos \alpha}.$$

Выражая $\sin \varphi$ через $\operatorname{tg} \varphi$, найдем AK .

13. Так как абсолютная величина скорости собаки постоянна, а

меняется только направление скорости, то ускорение собаки направлено перпендикулярно к вектору скорости. Траекторию движения собаки за малый промежуток времени Δt можно считать дугой окружности. Обозначим R радиус этой окружности. Тогда ускорение собаки — центростремительное, равное $a = v_2^2 / R$. За время Δt вектор скорости собаки поворачивается на угол $\alpha = v_2 \Delta t / R$ (рис.55). А лиса за это время перемещается на расстояние $v_1 \Delta t$. Так как вектор скорости собаки направлен все время на лису, то это расстояние равно αl . Следовательно,

$$v_1 \Delta t = \alpha l = \frac{v_2 l \Delta t}{R}.$$

Отсюда

$$R = \frac{v_2}{v_1} l, \quad \text{и} \quad a = \frac{v_1 v_2}{l}.$$

14. Выделим некоторую звезду и найдем ее скорости в системах координат, связанных с первой и второй звездами, вблизи которых находились космонавты. По условию задачи скорость в системе координат, связанной с первой звездой, равна

$$\vec{v}_1 = \alpha \vec{r}_1,$$

где \vec{r}_1 — вектор, проведенный от первой звезды к выделенной звезде (рис.56). В системе, связанной со второй звездой, на которую перелетели космонавты, скорость выделенной звезды равна $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_0$, где $\vec{v}_0 = \alpha \vec{r}_0$ — скорость второй звезды относительно первой. Проведя вектор \vec{r}_2 от второй звезды к выделенной, легко

увидеть, что $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$. Соответственно,

$$\vec{v}_2 = \alpha \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_0 \right) = \alpha \vec{r}_2.$$

Следовательно, космонавты опять увидят, что все звезды разлетаются со скоростями, пропорциональными расстоянию до них.

15. Шнур нужно расположить по логарифмической спирали. Это не трудно доказать, показав, что угол, образуемый касательной к шнуру с прямой, проведенной в заданную точку, постоянен (он равен $\arccos \frac{v_1}{v_2}$).

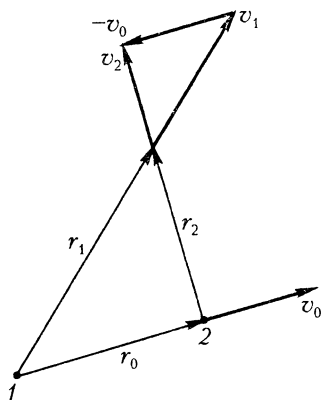


Рис. 56

16. У ершика, вдвинутого снизу в вертикальную трубку, щетинки изогнуты, как показано на рисунке 57. При наклоне трубки давление щетинок на стенку трубки с одной стороны ослабевает, и при некотором наклоне щетинка начинает скользить вверх по трубке до тех пор, пока из-за изменения кривизны щетинки сила давления на стенку, а следовательно, и сила трения скольжения не возрастают настолько, что щетинка останавливается. При выпрямлении трубки обратного скольжения не происходит, так как сила трения покоя больше силы трения скольжения. Таким образом, ершик будет шагами продвигаться вверх по трубке, «расклиниваясь» в трубке за счет сил трения покоя и проскальзывая за счет уменьшения трения при скольжении.

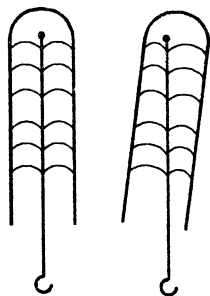


Рис. 57

17. На человека на горке действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила \vec{R} , равная сумме сил трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и нормальной реакции горки \vec{N} (рис. 58, а). Так как момент силы тяжести относительно центра масс человека равен нулю, то человек будет сохранять равновесие и не «переворачиваться» только в том случае, если сила \vec{R} проходит через его центр масс.

Если трение подошв обуви о горку велико и человек стоит на горке, то сумма сил, действующих на человека, равна нулю, т.е. сила \vec{R} направлена вертикально и равна силе тяжести.

Иное дело, если трение малое. Разберем вначале предельный

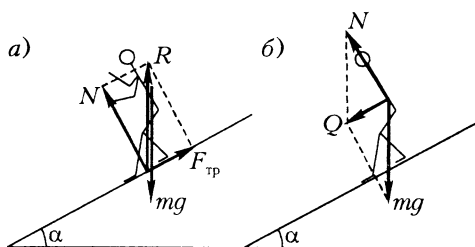


Рис. 58

mg и \vec{N} при этом не будет равна нулю. Она направлена параллельно наклонной плоскости и равна $mg \sin \alpha$. Поэтому человек должен спускаться с ускорением $a = g \sin \alpha$. Если трение мало, но не равно нулю, то ускорение человека может быть меньше. Записав второй закон Ньютона, найдем, что оно должно быть не меньше $a = g \sin \alpha - F_{тр}/m$.

18. Наибольшему разрушению подвергнется сопряжение дуг, образуемых дорогой. В этом месте центростремительное ускорение, сообщаемое вагону равнодействующей приложенных к нему сил, испытывает скачок, равный $v^2(1/R_1 + 1/R_2)$. Из-за зазора между щеками колес и рельсами происходит удар. Несколько менее сильный удар происходит и в местах сопряжения прямых участков дороги с дугами.

Сопряжение различных участков, а также повороты дороги из-за этого никогда не делаются с помощью дуг окружностей. Они устраиваются так, чтобы радиус кривизны менялся как можно более плавно.

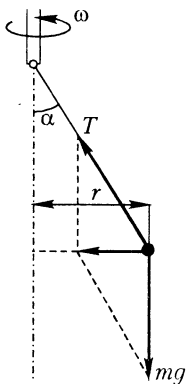


Рис. 59

19. Если шарик вращается по окружности и стержень составляет с вертикалью угол α , то центростремительное ускорение шарика сообщает равнодействующая силы тяжести и силы натяжения стержня. Эта равнодействующая направлена горизонтально и равна $mg \tan \alpha$ (рис.59). Запишем уравнение движения шарика:

$$mg \tan \alpha = m \omega^2 r, \text{ или } g \tan \alpha = \omega^2 l \sin \alpha.$$

Отсюда

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l}.$$

Это выражение справедливо, однако, только при $\omega^2 l \geq g$, т.е. при $\omega \geq \sqrt{g/l}$ ($\cos \alpha$ должен

случай: $\vec{F}_{тр} = 0$. Тогда человек не будет падать, если он перпендикулярен к горке (рис.58,б). Только в этом случае сила реакции горки \vec{N} проходит через центр масс человека. Но равнодействующая \vec{Q} сил

быть меньше 1). При $\omega < \sqrt{g/l}$ получим $g \operatorname{tg} \alpha > \omega^2 r$, т.е. равнодействующая силы тяжести и силы натяжения нити сообщает шарiku большее ускорение, чем при вращении по окружности, поэтому стержень с шариком будут вращаться, оставаясь вертикальными. График зависимости α от ω показан на рисунке 60.

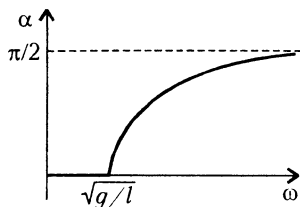


Рис. 60

20. В то время когда конькобежец набирает скорость, его ноги движутся в двух разных параллельных плоскостях, находящихся на некотором расстоянии друг от друга. Резкие движения ног вызывают появление момента сил, стремящегося повернуть корпус человека вокруг вертикальной оси. Пусть конькобежец в такт движению ног размахивает руками так, чтобы движения соответствующих рук и ног были противофазными. При таком движении рук возникает момент сил, противодействующий моменту сил, обусловленному движением ног, и компенсирующий его.

21. На летящий самолет в плоскости, перпендикулярной направлению его полета, действуют две силы — сила тяжести и аэродинамическая подъемная сила. Их равнодействующая при повороте самолета должна быть направлена к центру окружности, по которой движется самолет. Это возможно, если корпус самолета наклонен в сторону поворота (рис. 61). Такой наклон самолета получается благодаря тому, что при повороте киля (руля) из-за давления воздуха на киль самолет начинает поворачиваться вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр тяжести. Одно из крыльев самолета тогда движется быстрее другого. На это крыло действует большая аэродинамическая подъемная сила, и самолет поворачивается вокруг горизонтальной оси. При этом подъемная сила, действующая на это крыло, уменьшается, а на другое крыло возрастает.

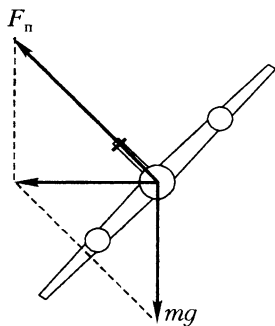


Рис. 61

При повороте теплохода на его внешний борт действует сила избыточного давления, сообщающая теплоходу центростремительное ускорение. Эта сила появляется благодаря тому, что при повороте руля теплоход поворачивается вокруг вертикальной оси. При этом он продолжает двигаться по инерции бортом вперед. Точка приложения равнодействующей сил добавочного гидродинамического давления лежит на середине погруженной части теплохода.

Поэтому если центр тяжести теплохода лежит ниже середины его части, находящейся в воде, то теплоход наклоняется в сторону поворота. Если центр тяжести теплохода лежит выше середины части, погруженной в воду, то теплоход при повороте наклоняется в сторону, противоположную повороту. Угол наклона теплохода определяется условием равенства нулю суммарного момента сил гидростатического давления, равнодействующая которых приложена к центру тяжести вытесненного объема жидкости, и сил добавочного гидродинамического давления на внешний борт теплохода. Теплоход может плавать устойчиво даже в том случае, когда его центр тяжести лежит выше центра тяжести вытесненного объема воды, т.е. выше точки приложения «выталкивающей» силы. Для этого необходимо, чтобы благодаря форме корпуса теплохода при его наклоне центр тяжести вытесненного объема смещался в сторону наклона.

Поворот подводной лодки происходит так же, как и поворот теплохода, благодаря добавочному гидродинамическому давлению на внешний борт. Но центр тяжести подводной лодки находится ниже ее середины, так как он должен лежать ниже точки приложения равнодействующей сил гидростатического давления, находящейся примерно в середине сечения подводной лодки (иначе подводная лодка перевернулась бы). Поэтому при повороте подводная лодка наклоняется в сторону поворота.

22. Пусть в момент отрыва верхнего шарика от вертикальной плоскости гантелька составляет угол α с вертикалью (рис.62), скорость верхнего шарика \vec{v} , скорость нижнего \vec{u} . Согласно закону

сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = mg\Delta h = mgl(1 - \cos \alpha),$$

где m – масса каждого шарика. Отсюда

$$v^2 + u^2 = 2gl(1 - \cos \alpha).$$

Поскольку стержень жесткий, проекции \vec{v} и \vec{u} на стержень равны:

$$v \cos \alpha = u \sin \alpha.$$

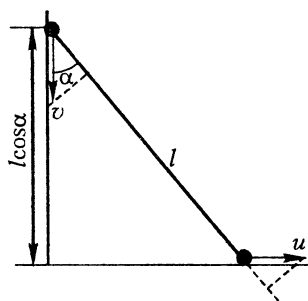


Рис. 62

Из уравнений для скоростей находим

$$u^2 = 2gl(\cos^2 \alpha - \cos^3 \alpha) = 2gl(x^2 - x^3), \text{ где } x = \cos \alpha.$$

До момента отрыва центр масс гантельки двигался с горизонтальным ускорением (это ускорение сообщалось силой реакции верти-

кальной стенки). Поэтому к моменту отрыва верхнего шарика от вертикальной стенки скорость u максимальна. Найдем значение $\cos \alpha$, при котором выражение $y = x^2 - x^3$ максимально. Так как $y' = 2x - 3x^2 = 0$ при $x = 2/3$, то u^2 максимально при $\cos \alpha = 2/3$. Отсюда

$$u_{\max} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} gl}.$$

23. Пузырек не будет перемещаться по трубке, движущейся с ускорением \vec{a} , если архимедова выталкивающая сила \vec{F}_A будет направлена перпендикулярно стенкам трубки, т.е. по ее радиусу (рис.63,а). Эта сила будет уравниваться силой реакции \vec{N} со стороны стенки (членами $m_b \vec{g}$ и $m_b \vec{a}$ во втором законе Ньютона можно пренебречь, так как масса m_b воздуха в пузырьке очень мала).

Если рассмотреть ускоренно движущуюся трубку без воздушного пузырька (рис.63,б), то на элемент жидкости, расположенный в

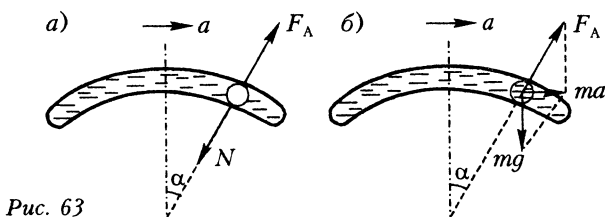


Рис. 63

том же месте трубки, где был пузырек, будет действовать сила Архимеда \vec{F}_A , направленная точно так же по радиусу, и сила тяжести $m\vec{g}$ (m — масса элемента жидкости). Равнодействующая этих сил направлена горизонтально и равна $m\vec{a}$. Поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}, \text{ и } a = g \operatorname{tg} \alpha.$$

24. Свободная поверхность жидкости во вращающемся сосуде принимает форму параболоида вращения. Рассмотрим на поверхности жидкости некоторый малый элемент массой m , находящийся на расстоянии x от оси вращения (рис.64). На этот элемент действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила давления \vec{N} со стороны остальной

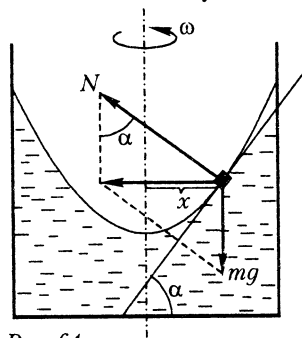


Рис. 64

жидкости. Сила \vec{N} направлена перпендикулярно свободной поверхности жидкости. Поскольку выбранный элемент жидкости движется с постоянной угловой скоростью по окружности радиусом x , то равнодействующая сил \vec{N} и $m\vec{g}$ направлена к оси вращения и равна по абсолютной величине $m\omega^2 x$. Следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g},$$

где α — угол наклона касательной к поверхности жидкости. Из этого соотношения следует, что поверхность жидкости в плоскости рисунка имеет форму параболы, а в пространстве — форму параболоида. Действительно, так как

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx},$$

то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Отсюда

$$y = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} x^2$$

(мы выбрали начало координат в вершине параболоида).

Теперь найдем фокусное расстояние параболического зеркала. Рассмотрим произвольный луч, падающий на параболоид параллельно его оси, и докажем, что после отражения он пересечет ось в точке, расположенной на расстоянии $F = g / (2\omega^2)$ от вершины (рис. 65). Если точка отражения луча имеет координаты x и $y = ax^2$ (в нашем случае $a = \omega^2 / (2g)$), то

$$F = y - x \operatorname{ctg} 2\beta,$$

где β — угол между падающим лучом и касательной к параболе. Учитывая,

Рис. 65

что

$$\operatorname{ctg} \beta = \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = 2ax \text{ и } \operatorname{ctg} 2\beta = \frac{\operatorname{ctg}^2 \beta - 1}{2\operatorname{ctg} \beta},$$

получим

$$F = \frac{1}{4a} = \frac{g}{2\omega^2}.$$

Те, кто знаком со сферическими зеркалами, могут найти радиус кривизны R параболоида вблизи его вершины и определить фокусное расстояние соответствующего сферического зеркала из соотношения $F = R/2$. Однако приведенный вывод демонстрирует уникальное свойство параболоида собирать в одну точку все падающие параллельно оси лучи, а не только идущие близко к оси, как в случае сферического зеркала.

Итак, для зеркального телескопа Вуда получим

$$1,22 \text{ м} \leq F \leq 4,9 \text{ м}.$$

25. При движении смычка струна благодаря трению увлекается смычком и натягивается. Когда величина силы трения становится равной некоторой максимальной, струна начинает проскальзывать относительно смычка. Так как при этом величина силы трения резко уменьшается, то струна совершает почти свободное колебание. Затем, когда скорости струны и смычка сравняются, струна «захватывается» смычком, и т. д. Колебания струны незатухающие, так как при движении струны в ту же сторону, что и смычка, сила трения, действующая на струну, совершает положительную работу, компенсируя потери энергии струной.

26. При движении автомобиля участок колеса, соприкасающийся с дорогой, неподвижен относительно нее. При резком торможении колеса скользят по дороге (юз).

Обозначим \vec{v}_1 скорость движения автомобиля до торможения и рассмотрим, какая сила должна действовать на автомобиль, чтобы он начал двигаться вбок (чтобы машину «занесло»). Обозначим \vec{v}_2 скорость бокового заноса (рис. 66) и будем считать, что $v_2 \ll v_1$. Так как

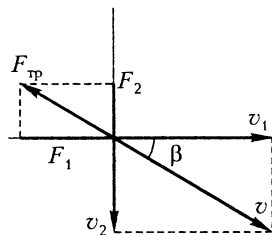


Рис. 66

резльтирующая скорость \vec{v} автомобиля равна сумме $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, а сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ направлена противоположно вектору \vec{v} , то ее проекция на вектор \vec{v}_1 равна $F_1 = F_{\text{тр}} \cos \beta$, а проекция на вектор \vec{v}_2 равна $F_2 = F_{\text{тр}} \sin \beta$, где $\beta = \arctg \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_2}{v_1}$. Следовательно,

$$F_2 = F_{\text{тр}} \frac{v_2}{v_1} = \mu mg \frac{v_2}{v_1}$$

(здесь m – масса автомобиля, μ – коэффициент трения).

Ясно, что для возникновения движения вбок необходима сила, равная по модулю F_2 . А так как эта сила пропорциональна скорости

v_2 , то такой занос может быть вызван сколь угодно малой силой. Она может появиться, например, как составляющая силы тяжести при неровной дороге.

27. Обсудим второй вопрос. Предположим, что мы хотим вытащить гвоздь, например, с помощью плоскогубцев. Для того чтобы гвоздь двигался поступательно, на него должна действовать сила F , большая максимальной силы трения покоя $F_{\text{тр}}$. А чтобы гвоздь вращался, к плоскогубцам необходимо приложить силу F_1 такую, чтобы ее момент относительно оси гвоздя был больше момента силы трения:

$$F_1 R > F_{\text{тр}} r,$$

где R — радиус рукоятки плоскогубцев, r — радиус гвоздя. (Сила трения, действующая на гвоздь, по абсолютной величине такая же, как в первом случае, но направлена не вдоль оси гвоздя, а перпендикулярно ей.) Таким образом,

$$F_1 > \frac{r}{R} F_{\text{тр}}.$$

Так как $R \gg r$, сила F_1 может быть во много раз меньше силы F .

Нетрудно показать, что если гвоздь вращается, то вытащить его из стены можно, приложив сколь угодно малую силу F_2 , параллельную оси гвоздя (см. задачу 26). Следовательно, вытащить гвоздь из стены можно, приложив к плоскогубцам силу $F_1 > \frac{r}{R} F_{\text{тр}}$ и сколь угодно малую силу F_2 , что в сумме заведомо меньше F .

28. Изменение импульса нити ΔP за время Δt равно произведению массы нити $\Delta m = \mu v \Delta t$, которая пришла за это время в движение, на ее скорость v :

$$\Delta P = \mu v^2 \Delta t.$$

Это изменение равно импульсу внешних сил:

$$\Delta P = (F - mg) \Delta t = (F - \mu l g) \Delta t.$$

Отсюда для силы F , с которой тянут нить, получаем следующее выражение:

$$F = \mu (v^2 + gl).$$

29. При попадании на тележку массой M порции снега массой Δm ее скорость v меняется на величину Δv , которая находится из закона сохранения импульса в проекции на горизонтальное направление

$$Mv = (M + \Delta m)(v + \Delta v).$$

Здесь не учтен начальный импульс порции снега, так как он не имеет

горизонтальной составляющей. Аналогично, сбрасывание снега в сторону тоже не надо учитывать, так как оно не меняет импульса тележки. В результате находим

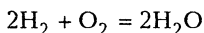
$$\Delta v = \frac{\Delta m}{M} v.$$

Отсюда следует, что замедление движения тележки тем меньше, чем больше ее масса. Поэтому тележка, с которой снег не сбрасывают, будет двигаться быстрее.

30. Для оценки будем считать, что топливо в ракете сгорает очень быстро и образующиеся газы выбрасываются одной порцией. Обозначим v скорость ракеты, u – скорость газов, m – массу ракеты, M_0 – массу сгоревшего топлива. Тогда $M_0 u = m v$, и

$$M = m \frac{v}{u} = 0,01 \frac{c}{u} m.$$

Теперь найдем u . Из уравнения химической реакции горения водорода



следует, что для сгорания двух киломолей водорода необходим киломоль кислорода. В результате получается два киломоля паров. Иными словами, при сгорании 4 кг водорода в 32 кг кислорода образуется 36 кг паров. Следовательно, масса ΔM паров образуется при сгорании массы $\frac{4}{36} \Delta M = \frac{1}{9} \Delta M$ водорода. При этом выделяется энергия

$$Q = \frac{1}{9} \Delta M q,$$

где q – теплотворная способность водорода. Конечно, только часть этой энергии превращается в кинетическую энергию газов. Но для оценки будем считать, что

$$Q = \frac{1}{2} \Delta M u_{\text{пр}}^2, \text{ т.е. } \frac{1}{9} \Delta M q = \frac{1}{2} \Delta M u_{\text{пр}}^2.$$

Отсюда

$$u_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{2}{9} q} \approx 5 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Это – «предельная» скорость истечения газов. Поэтому

$$M_0 > 0,01 \frac{c}{u_{\text{пр}}} m = 600m.$$

Отношение M_0/m огромно, но сильно занижено. Пока масса еще не сгоревшего топлива велика по сравнению с m , реактивная сила сообщает импульс не только ракете, но и оставшемуся топливу.

Поэтому наш расчет некорректен, и нужно пользоваться формулой Циолковского

$$\frac{M_0 + m}{m} = e^{v/u},$$

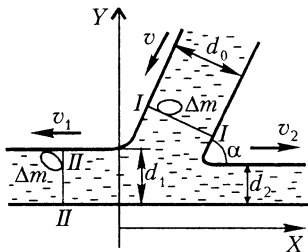
которая в нашем случае дает

$$M_0 = me^{600} \approx m \cdot 10^{260} = 20 \cdot 10^{260} \text{ т!}$$

Эта цифра во много раз превышает массу Солнца $M_C = 2 \cdot 10^{27}$ т. Химическое топливо, как показывают расчеты, не может дать скорость истечения больше 10 км/с. Оно, очевидно, для межзвездных полетов неприменимо.

Для достижения скоростей, сравнимых со скоростью света, необходимо использовать топливо, которое дает скорость истечения порядка скорости света. Идеальный случай $u = c$ (фотонная ракета).

31. Обозначим d_1 и d_2 толщины образовавшихся струй (рис. 67), а v_1 и v_2 — их скорости. Так как через поперечное сечение первоначальной падающей струи за одну секунду проходит такая же масса жидкости, что и через поперечные сечения обеих образовавшихся струй, и поскольку жидкость несжимаема, то



$$\rho d_0 v = \rho d_1 v_1 + \rho d_2 v_2,$$

Рис. 67

Найдем, как меняется скорость частиц жидкости. Проследим за небольшой массой Δm жидкости, которая перемещается из основной струи в

левый рукав. Такое перемещение равносильно просто переносу этой жидкости из области I в область II . Но в области I мы «извлекаем» объем жидкости V_1 , и силы давления совершают положительную работу $A_1 = p_1 V_1$. В области II работа сил давления отрицательна и равна $A_2 = -p_2 V_2$. Следовательно, полная работа внешних сил равна $A = p_1 V_1 - p_2 V_2$. Но жидкость несжимаема, и, следовательно, $V_1 = V_2$. Кроме того, давление во всех струях тоже одинаково и равно атмосферному, так как границы у струй плоские. Поэтому $A = 0$. По теореме о кинетической энергии изменение кинетической энергии массы Δm жидкости равно A . Следовательно, кинетическая энергия частиц жидкости и их скорость остаются постоянными: $v_1 = v_2 = v$, и из первого равенства получаем

$$d_0 = d_1 + d_2.$$

Поскольку на жидкость не действуют никакие внешние горизонталь-

ные силы, горизонтальная проекция импульса текущей жидкости должна оставаться постоянной:

$$mv \cos \alpha = m_1 v_1 - m_2 v_2,$$

где m , m_1 и m_2 – массы жидкости, прошедшие через сечения струй за одно и то же время. Так как $m \sim d_0$, $m_1 \sim d_1$ и $m_2 \sim d_2$, то

$$d_0 \cos \alpha = d_1 - d_2.$$

Тогда получаем

$$d_1 = d_0 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad d_2 = d_0 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Мы говорили, что давление во всех случаях равно атмосферному. Это, однако, верно далеко от места попадания струи на плоскость, там где струя плоская. В том же месте, где струя ударяет о плоскость, она искривляется, и давление здесь другое. Его нетрудно найти. Так как сила \vec{F} , действующая на струю со стороны плоскости, равна скорости изменения проекции импульса \vec{P} струи на ось Y , перпендикулярную к плоскости, а $\Delta P_y = P \sin \alpha$, то

$$F = \frac{\Delta P_y}{\Delta t} = \frac{P \sin \alpha}{\Delta t}.$$

За время Δt на плоскость попадает объем жидкости $V = Sv\Delta t$ с массой $M = \rho Sv\Delta t$ и импульсом $P = Mv = \rho Sv^2 \Delta t$, где S – площадь сечения струи. Поэтому

$$F = \frac{\rho Sv^2 \sin \alpha \cdot \Delta t}{\Delta t} = \rho Sv^2 \sin \alpha.$$

Благодаря этой силе удерживаются, например, на поверхности воды лыжник (рис. 68) и глассер на подводных крыльях.

Площадь S зоны повышенного давления примерно равна площади сечения струи. Поэтому

$$p \sim \frac{F}{S} = \rho v^2 \sin \alpha.$$

Давление это невелико. Например, при нормальном падении на плоскость ($\alpha = 90^\circ$) струи воды, скорость которой равна, скажем, 10 м/с (такую скорость имеет, например, капля, падающая с высоты 5 м), давление составляет

$$p \sim 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

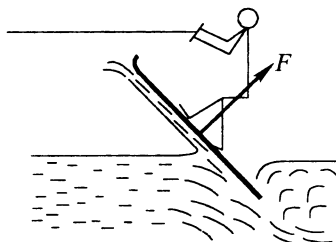


Рис. 68

Эта величина равна всего лишь атмосферному давлению. В то же время не зря существует поговорка, что капля камень точит. И действительно, при регулярном падении капель с высоты всего 1—2 м камень постепенно разрушается. В чем же здесь дело?

Мы вернемся к этому вопросу в задаче 32. Здесь же рассмотрим другое интересное явление — кумулятивную струю. Она возникает, например, когда поток жидкости налетает под углом на плоскость так, как показано на рисунке 69. В этом случае вдоль плоскости «бьет» струя, скорость которой во много раз превышает скорость набегающего потока. Такая струя обладает огромной кинетической энергией.

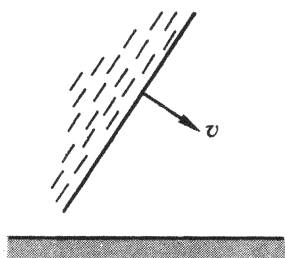


Рис. 69

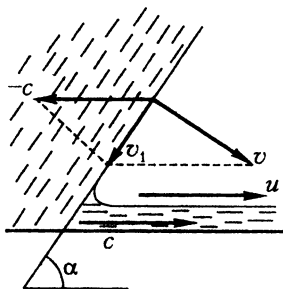


Рис. 70

Найдем скорость \vec{u} кумулятивной струи при падении на плоскость потока жидкости, имеющего скорость \vec{v} . Обозначим α угол между фронтом потока и плоскостью (рис. 70). Точка пересечения фронта потока и плоскости перемещается вдоль плоскости. Обозначим \vec{c} ее скорость. Если мы перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью \vec{c} , то в ней задача сводится к предыдущей — струя движется так, что ее скорость направлена под углом α к плоскости, со скоростью $\vec{v}_1 = \vec{v} - \vec{c}$ и разбивается на две струи, движущиеся со скоростями, равными по модулю v_1 «вперед» и «назад» вдоль плоскости.

Найдем v_1 и c . Так как вектор \vec{v}_1 перпендикулярен вектору \vec{v} , то

$$c = \frac{v}{\sin \alpha} \text{ и } v_1 = v \operatorname{ctg} \alpha.$$

В неподвижной системе отсчета, в которой плоскость покоится, скорость u кумулятивной струи равна $c + v_1$, т.е.

$$u = \frac{v}{\sin \alpha} + v \operatorname{ctg} \alpha = v \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

При малых α эта скорость может достигать огромной величины, во много раз превосходящей v . Например, при $\alpha = 10^\circ$ $u \approx 11v$, при $\alpha = 2^\circ$ $u \approx 57v$ и т.д. Во много раз в кумулятивной струе может быть больше и энергия единицы объема жидкости (плотность энергии)

$$\rho u^2/2. \text{ При } \alpha = 10^\circ \frac{\rho u^2}{\rho v^2} \approx 120, \text{ при } \alpha = 2^\circ \frac{\rho u^2}{\rho v^2} \approx 3200!$$

Возникновением кумулятивной струи объясняются необычайно высокие приливы в некоторых сужающихся заливах. Обычно на берегу океана высота прилива составляет примерно 1 м. В то же время, например, в сужающемся заливе Фанди (Канада) она достигает 15 м. Это объясняется тем, что когда приливная волна входит в залив, она распространяется под углом к берегам. Возникает кумулятивная струя, идущая вдоль берегов и попадающая в узкие части залива. Так как ее скорость в несколько раз превышает скорость приливной волны, то высота прилива оказывается значительно выше.

Кумулятивная струя возникает и при столкновении двух струй, фронты которых движутся под острым углом друг к другу (рис.71).

Такое столкновение происходит, например, в кумулятивном снаряде. Снаряд представляет собой цилиндр, заполненный взрывчатим веществом, в котором сделана выемка. Выемка покрывается тонкой (1–2 мм) металлической облицовкой. При взрыве облицовка начинает сжиматься, двигаясь

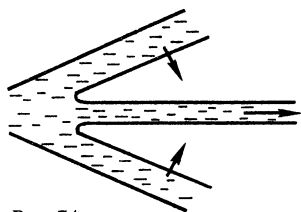


Рис.71

со скоростью примерно 10^3 м/с, и развивается огромное давление порядка $4 \cdot 10^{13}$ Н/м². При таком давлении металл ведет себя подобно жидкости, и образуется кумулятивная струя толщиной 1,5–3 мм, скорость которой может быть больше 10^4 м/с. Такая струя легко пробивает слой стали (брони), толщина которой, как оказывается, равна длине кумулятивной струи.

Этот результат нетрудно получить простыми вычислениями. Так как при больших давлениях металл ведет себя как жидкость, то определим глубину проникновения струи длиной l и плотностью ρ_0 в жидкость плотностью ρ . В жидкости образуется каверна, по стенкам которой начинает растекаться струя (рис.72).

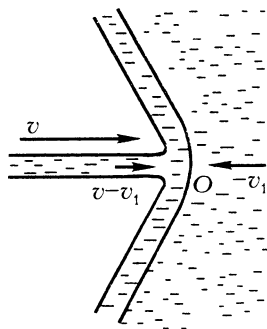


Рис. 72

Обозначим v_1 скорость головки струи, которая приняла форму гриба со шляпкой, а v — скорость струи. В системе отсчета, движущейся со скоростью v_1 , скорость струи равна $v - v_1$, а скорость жидкости равна $-v_1$. В вершине головки струи сталкиваются две струи, идущие справа и слева. Их давления должны совпадать. А так как давление, как мы показали, пропорционально ρv^2 , то

$$\rho_0 (v - v_1)^2 = \rho v_1^2.$$

Отсюда

$$v_1 = \frac{v}{1 + \sqrt{\rho/\rho_0}}.$$

Если струя падает в жидкость той же плотности, то $\rho = \rho_0$ и $v_1 = v/2$ — скорость проникновения струи равна половине скорости струи. Струя будет проникать в жидкость, пока вся она не пройдет точку O , т.е. в течение времени $\tau = l/(v - v_1)$. За это время она пробьет слой жидкости толщиной

$$L = \frac{v}{2} \tau = l \frac{v}{2(v - v_1)}.$$

При $\rho = \rho_0$ $L = l$, т.е. струя пробьет слой жидкости толщиной в длину струи. В случае кумулятивного снаряда длина струи примерно равна образующей конической вставки. После пробития слоя, толщина которого меньше длины струи, скорость струи равна первоначальной.

Интересное применение кумулятивной струи для сварки металлов предложил академик М.А.Лаврентьев. Если два листа металла бросить плашмя навстречу друг другу с большой скоростью, то возникает кумулятивная струя, бьющая от точки контакта металлов. Эта струя уносит с собой окислы и загрязнения, благодаря чему соединившиеся листы свариваются. Так можно обеспечить высококачественную сварку таких металлов, которые вообще не свариваются друг с другом.

Еще один, теперь уже последний, пример кумулятивной струи. При бросании тела в жидкость, например камня в воду, в жидкости образуется воронка. Затем жидкость со всех сторон устремляется в воронку и образует кумулятивную струю, поднимающуюся в виде всплеска на довольно большую высоту, иногда выше того уровня, с которого было брошено тело.

Вот к каким интересным выводам приводит почти обычная «школьная» задача.

32. Для простоты будем считать, что кран представляет собой круглую заслонку площадью S , равной площади сечения трубы. При закрывании такого крана частицы воды, попавшие на заслонку,

останавливаются, передавая свой импульс заслонке. В результате этого у заслонки образуется область с повышенной плотностью, в которой вода покоится. Границы этой области перемещаются по трубе со скоростью звука c (с этой скоростью распространяется любое упругое возмущение в жидкости). Значит, за время Δt остановятся те частицы, которые находятся в объеме $V = Sc\Delta t$. Масса этого объема воды равна $m = \rho Sc\Delta t$ (ρ – плотность воды), изменение скорости Δv равно v , а изменение импульса ΔP равно $\rho Scv\Delta t$. Следовательно, на воду (согласно второму закону Ньютона) действует сила

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \rho Scv.$$

Такая же по абсолютной величине сила действует со стороны воды на заслонку, поэтому давление на заслонку равно

$$p = \frac{F}{S} = \rho cv.$$

Подставляя численные значения $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $c = 1500 \text{ м/с}$ и $v = 10 \text{ м/с}$, получим

$$p = 1,5 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = 150 \text{ атм}.$$

Это в 150 раз больше давления установившегося потока на преграду. Понятно, почему капля долбит камень!

Явление, которое мы разбирали, называется гидравлическим ударом. Встречается оно довольно часто. Например, когда морская волна ударяет о мол или прибрежную скалу. Из-за него же опасно падать в воду плашмя.

33. Будем считать, что труба достаточно длинная, так что граница областей с различными плотностями находится далеко от конца цилиндра. Тогда ясно, что единственной горизонтальной силой, действующей на вещество в цилиндре, является сила \vec{F} . Поэтому изменение импульса вещества в цилиндре равно импульсу этой силы.

Обозначим скорость движения поршня v , а плотность сжатого вещества ρ (рис. 73). Чтобы вычислить изменение импульса вещества, перейдем в инерциальную систему отсчета, связанную с поршнем. Тогда вещество слева от движущейся границы неподвижно, а справа от границы имеет скорость, равную v и направленную влево, в сторону поршня. За время Δt из одного состояния в другое перейдет вещество массой $\rho_0 \cdot c\Delta t \cdot \pi r^2$ (это хорошо видно в не-

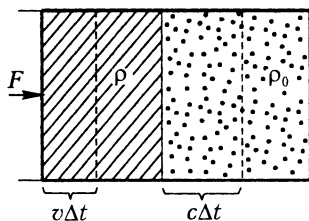


Рис. 73

подвижной системе отсчета), изменив скорость от $-v$ до нуля. Получаем

$$F \Delta t = \rho_0 c \Delta t \pi r^2 \cdot v.$$

Ясно, что скорости c и v не независимы. Из условия сохранения массы следует, что масса вещества, которая находится в объеме $\pi r^2 v \Delta t$, при смещении поршня на расстояние $v \Delta t$ должна распределиться по объему $\pi r^2 c \Delta t$, причем здесь она будет иметь плотность $\Delta \rho$. Поэтому

$$\pi r^2 v \rho \Delta t = \pi r^2 c \Delta \rho \Delta t,$$

откуда

$$c = v \frac{\rho}{\Delta \rho}.$$

Подставляя это выражение в формулу для $F \Delta t$, получим

$$F = \pi r^2 v^2 \frac{\rho \rho_0}{\rho - \rho_0}, \text{ и } \Delta \rho = p \frac{\rho_0}{\rho_0 c^2 - p},$$

где $p = F / (\pi r^2)$ — давление на поршень.

Мы рассмотрели, как распространяется импульс сжатия в упругой среде, например в газе. Если скорость v поршня мала, то мало $\Delta \rho$, а c — это скорость звука в газе. В этом случае, впрочем, не происходит скачка плотности — резкого изменения ρ . Фронт импульса размывается, и ρ меняется плавно. Если скорость поршня велика — больше скорости звука, то картина резко меняется. Прежде всего, в равенство для $F \Delta t$ уже входит не скорость c звука в среде с плотностью ρ_0 , а скорость c_1 в среде с плотностью $\rho = \rho_0 + \Delta \rho$. При больших $\Delta \rho$ они не равны, и, как оказывается, $c_1 > c$. В этом случае и c уже не равно скорости звука, а совпадает со скоростью поршня. На фронте импульса развиваются очень большие давления, он резкий — со скачком плотности и давления. Такой импульс называется ударной волной. При движении ограниченного тела (самолета, снаряда) в среде со скоростью больше скорости звука впереди тела бежит ударная волна. Эта ударная волна распространяется затем в стороны со скоростью, равной скорости звука. (В результате возникает картина распространения волн, которую мы увидим при решении задачи 153.)

34. При распространении цунами (или прилива) вода приводится в движение и приобретает импульс у переднего фронта волны и затем теряет этот импульс, когда ее обгоняет задний фронт. Обозначим v скорость волны и рассмотрим движение воды в системе координат, движущейся со скоростью v . Невозмущенная вода перед и за цунами движется со скоростью $-v$. Обозначим u скорость воды в некотором сечении l волны и h — расстояние в этом сечении до дна

океана (рис.74). За время Δt через сечения I и II проходят одинаковые объемы воды (вода несжимаема). Следовательно, $h_0 v \Delta t = h u \Delta t$, и

$$u = \frac{v h_0}{h}.$$

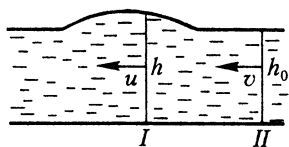


Рис. 74

Так как $h > h_0$, то $u < v$, и, следовательно, импульс воды, проходящей через слой $I-II$ за время Δt , уменьшается на $\Delta m(v - u) = \rho l h_0 v \Delta t (v - u)$, где ρ плотность воды и l — длина некоторого выделенного фронта волны. Это изменение импульса равно импульсу внешних сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , действующих на границах слоя $I-II$. Среднее давление в сечении I равно $\frac{1}{2} \rho g h$, а площадь сечения lh . Следовательно, $F_1 = \frac{1}{2} \rho g h^2 l$. В сечении II , соответственно, $F_2 = \frac{1}{2} \rho g h_0^2 l$. Равнодействующая этих сил равна их разности, а ее импульс равен $(F_1 - F_2) \Delta t = \frac{1}{2} \rho g l (h^2 - h_0^2) \Delta t$. Так как $h \approx h_0$ (высота волны мала по сравнению с глубиной океана), то можно считать, что $h + h_0 \approx 2h_0$, так что импульс внешних сил равен $\rho g l h_0 (h - h_0) \Delta t$ и, следовательно,

$$\rho l h_0 (v - u) v \Delta t = \rho g l (h - h_0) h_0 \Delta t,$$

или

$$v(v - u) = g(h - h_0).$$

Подставляя сюда $u = v h_0 / h$, получим

$$v^2 \frac{h - h_0}{h} = (h - h_0) g.$$

Отсюда, если учесть, что $h \approx h_0$, найдем

$$v = \sqrt{gh} \approx \sqrt{gh_0}.$$

При распространении коротких гравитационных волн, длина волны λ которых мала по сравнению с глубиной океана, роль глубины океана играет длина волны, так как на глубине такого порядка затухает возмущение поверхности океана. Поэтому скорость распространения таких волн оказывается пропорциональной $\sqrt{g\lambda}$. Скорость же цунами, как мы видели, не зависит от длины волны. Такова же скорость приливной волны и вообще любых волн, длина которых много больше глубины океана. Подставляя в формулу для скорости $h_0 = 5 \cdot 10^3$ м, получим $v = 220$ м/с.

Найдем еще время, за которое цунами или приливная волна может обогнать земной шар:

$$t = \frac{2\pi R_3}{v} = 1,8 \cdot 10^5 \text{ с} \approx 50 \text{ ч.}$$

Если убрать Луну и образовавшимся ранее приливным волнам предоставить возможность распространяться вокруг земного шара, то каждый из максимумов прилива проходил бы данную точку через 50 ч. Так как максимумов приливов два, то время между приливами было бы 25 ч – на час больше суток. Из-за влияния Луны распространение приливной волны оказывается не свободным, а вынужденным. Его можно сопоставить с вынужденными колебаниями маятника (см. задачу 147).

35. При движении стула до момента соприкосновения передних ножек с полом его центр тяжести опишет дугу окружности с центром, лежащим на прямой, проходящей через задние ножки стула. В момент удара о пол скорость центра тяжести будет иметь проекции как на вертикальную, так и на горизонтальную оси. Удар о пол является неупругим, и вертикальная проекция скорости центра тяжести стула «гасится». Для того чтобы обратилась в ноль горизонтальная проекция скорости центра тяжести, нужно, чтобы сила трения действовала некоторое время ($F_{\text{тр}} t = mv_{\text{гор}}$), а за это время стул сдвинется на некоторое расстояние вперед.

При большом начальном отклонении стула в момент удара передних ножек о пол задние могут оторваться от пола.

Одно время в литературе много писалось об инерциоидах – устройствах, которые, как утверждали авторы, движутся благодаря внутренним силам. Так как это противоречит законам механики, то эти законы объявлялись неверными. В действительности, конечно, поведение всех этих устройств прекрасно описывалось законами механики, а авторы плохо учитывали внешние силы и их характер, в частности силу трения.

Таким инерциоидом может быть стул с сидящим на нем человеком. Если, сидя на стуле (не касаясь ногами пола), резко отклониться назад, то стул отклонится от вертикали (делайте это не слишком энергично, а то перевернетесь!). Возвращаясь в нормальное положение, вы вместе со стулом отклонитесь вперед. Нетрудно сообразить, что когда вы откидываетесь назад, сила, действующая на ножки стула, увеличивается. Поэтому увеличивается и сила трения, не дающая им возможность проехать назад. При дальнейшем же движении стула, когда центр тяжести человека со стулом движется по дуге, сила давления на пол уменьшается, и сила трения оказывается недостаточной, чтобы удержать стул на месте.

36. Время столкновения пули с дверью (в отличие от времени воздействия пальца на дверь) мало. За это время деформация,

вызываемая давлением пули, не успевает распространиться на большие расстояния. Поэтому импульс, теряемый пулей, передается сравнительно небольшому участку двери, и пуля пробивает в ней небольшое отверстие.

За время входа пули в стакан уровень воды в стакане не успевает измениться. Поэтому в месте входа пули вода сжимается, и возникает область высокого давления, которая, расширяясь со скоростью звука, достигает через некоторое время стенок стакана. Стакан разлетается вдребезги.

37. За время Δt насос подает на высоту H массу воды $\rho V \Delta t$, совершая работу A , равную изменению механической энергии воды. Так как насос «гонит» воду с некоторой скоростью v , то

$$A = \frac{(\rho V \Delta t) v^2}{2} + (\rho V \Delta t) g H.$$

Следовательно, мощность насоса

$$N = \frac{\rho V v^2}{2} + \rho V g H.$$

Найдем скорость v . За время Δt через поперечное сечение трубы площадью $S = \pi d^2/4$ проходит объем воды $V \Delta t = v \Delta t \pi d^2/4$. Отсюда

$$v = \frac{4V}{\pi d^2}.$$

Таким образом, мощность насоса

$$N = \frac{8\rho V^3}{\pi^2 d^4} + \rho V g H.$$

Из последнего выражения видно, что чем больше диаметр d трубы, тем меньше необходимая мощность насоса. Но можно уменьшить величину N , не меняя диаметра трубы. Если трубу обрезать на высоте $h \ll H$, то вода будет вылетать из трубы с некоторой скоростью u . Для этого необходима мощность насоса

$N' = \frac{\rho V u^2}{2}$ (так как $h \ll H$, то потенциальной энергией на высоте h для простоты мы пренебрегаем). Для того чтобы вода поднялась на высоту H , необходимо, чтобы ее скорость была не меньше чем

$$u_{\min} = \sqrt{2g(H-h)} \approx \sqrt{2gH}.$$

Таким образом, получим, что в этом случае можно использовать насос мощностью

$$N' = \rho V g H.$$

38. Вертолет (или модель) удерживается в воздухе благодаря реактивной силе, возникающей, когда винт отбрасывает воздушную

струи. При этом на вертолет со стороны отбрасываемой струи, согласно третьему закону Ньютона, действует сила, равная по абсолютной величине силе, действующей на струю. Обозначим ρ плотность воздуха, S — площадь струи и v — ее скорость. Тогда за время Δt винтом «отбрасывается» вниз объем воздуха $Sv\Delta t$ с массой $m = \rho Sv\Delta t$, а импульс воздуха изменяется на величину

$$\Delta P = mv = \rho Sv^2 \Delta t.$$

Согласно второму закону Ньютона, на воздух действует сила

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \rho Sv^2.$$

Эта сила равна силе тяжести вертолета:

$$\rho Sv^2 = Mg,$$

мощность же двигателя равна энергии, сообщаемой воздуху за 1 с:

$$N = \frac{mv^2}{2\Delta t} = \frac{1}{2} \rho Sv^3.$$

Подставляя сюда $v = \sqrt{Mg/(\rho S)}$, получим

$$N = \frac{1}{2} Mg \sqrt{\frac{Mg}{\rho S}}.$$

Так как масса вертолета пропорциональна объему, т.е. кубу линейных размеров L^3 , а $S \sim L^2$, то

$$N \sim L^{7/2}.$$

Это означает, что отношение мощностей двигателей вертолета и модели должно быть равно отношению их линейных размеров в степени $7/2$:

$$\frac{N}{N_{\text{мод}}} = \left(\frac{L}{L_{\text{мод}}} \right)^{7/2} = 10^{7/2}.$$

Отсюда

$$N = N_{\text{мод}} \cdot 10^{7/2} \approx 96 \text{ кВт}.$$

39. Работа A двигателя равна изменению кинетической энергии воды. За время Δt двигатель засасывает объем воды $V = vS\Delta t$, имеющий относительно катера скорость v и кинетическую энергию

$$E_k = \frac{1}{2} (vS\Delta t) \rho v^2 = \frac{1}{2} \rho Sv^3 \Delta t$$

(здесь ρ — плотность воды). Эта вода выбрасывается со скоростью

u и кинетической энергией

$$E'_k = \frac{1}{2}(\rho S v \Delta t) u^2.$$

Так как вода несжимаема, то $v S \Delta t = u s \Delta t$, так что

$$u = v \frac{S}{s}, \text{ и } E'_k = \frac{1}{2} \rho \frac{S^3}{s^2} v^3 \Delta t.$$

Тогда

$$A = E'_k - E_k = \frac{1}{2} \rho \frac{S(S^2 - s^2)}{s^2} v^3 \Delta t.$$

Полезная же работа равна

$$A_{\text{пол}} = F_{\text{реакт}} v \Delta t,$$

где $F_{\text{реакт}}$ — реактивная сила, действующая на корабль. Она равна по абсолютной величине изменению импульса воды в единицу времени, так что

$$A_{\text{пол}} = \rho S \frac{S - s}{s} v^3 \Delta t.$$

Таким образом, КПД равен

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A} = \frac{2s}{S + s} \approx 0,04.$$

40. Вначале максимальное ускорение, с которым может двигаться автомобиль, определяется максимальным значением силы трения колес о дорогу:

$$a = \frac{F_{\text{тр}}}{M} = \frac{\mu M g}{M} = \mu g.$$

При этом автомобиль движется с мощностью, меньшей максимальной (чтобы не было проскальзывания), а его скорость пропорциональна времени:

$$v = at = \mu g t.$$

В момент времени $t = t_1$ скорость станет равной $v_1 = \mu g t_1$, а мощность двигателя достигнет величины

$$N = F_{\text{тр}} v_1 = \mu M g \cdot \mu g t_1 = \mu^2 g^2 M t_1.$$

Отсюда

$$t_1 = \frac{N}{\mu^2 g^2 M} \approx 2,8 \text{ с}, \text{ а } v_1 = \mu g t_1 \approx 16,8 \text{ м/с}.$$

Начиная с этого момента сила трения становится меньше максимальной, и изменение кинетической энергии автомобиля равно $N(t - t_1)$. Следовательно, общее время разгона автомобиля равно

$$t = t_1 + \frac{M(v^2 - v_1^2)}{2N} \approx 6,5 \text{ с.}$$

41. Так как частицы воды на поверхности находятся в равновесии, то потенциальная энергия частиц одинакова как в «углублении», так и далеко от полости. Далеко от полости она равна $-G \frac{Mm}{R}$, в нижней точке «углубления» $-G \frac{Mm}{R-h} + G \frac{V\rho m}{L+r}$, где m — масса частицы воды, h — понижение поверхности океана, L — глубина океана, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ — объем полости, M — масса Земли, R — радиус Земли. Таким образом,

$$G \frac{M}{R} = G \frac{M}{R-h} - \frac{4}{3}\pi G \rho \frac{r^3}{L+r}.$$

Отсюда, учитывая, что $h \ll R$, и для оценки принимая плотность полости равной средней плотности Земли: $\rho = M/(4\pi R^3/3)$, получим

$$hR(L+r) = r^3.$$

Полагая $r \gtrsim L$, найдем

$$r \approx \sqrt{2hR} \approx 15,7 \text{ км.}$$

Более точно это уравнение можно решать графически, начертив на миллиметровке графики функций $y_1 = r^3$ и $y_2 = (L+r)hR$, где $L \approx 10$ км, и найдя точку их пересечения.

42. Для простоты будем считать, что скорость спутника изменяется за очень короткий промежуток времени (малый по сравнению с периодом обращения спутника по круговой орбите). Минимальное расстояние от поверхности Земли до эллиптической орбиты равно радиусу первоначальной круговой орбиты, т.е. обе орбиты спутника имеют общую точку (точка 1 на рисунке 75), в которой и произошло изменение скорости спутника. Найдем скорости v_0 и v_1 спутника в этой точке на круговой и эллиптической орбитах, а затем и изменение скорости $\Delta v = v_1 - v_0$.

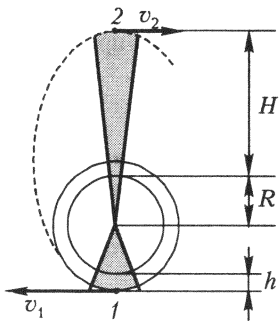


Рис. 75

Вначале определим скорость v_0 спутника при движении по круговой орбите. Так как центростремительное ускорение $a = v_0^2 / (R + h)$, где R – радиус Земли, спутнику сообщает сила тяготения $F = G \frac{mM}{(R + h)^2}$, где M – масса Земли, m – масса спутника, то, согласно второму закону Ньютона,

$$\frac{mv_0^2}{R + h} = G \frac{mM}{(R + h)^2}, \text{ и } v_0 = \sqrt{G \frac{M}{R + h}}.$$

Для того чтобы определить скорость v_1 спутника, когда он движется по эллиптической орбите на высоте h над Землей, воспользуемся законом сохранения энергии и вторым законом Кеплера. В тот момент, когда спутник находится на расстоянии h от Земли, он обладает потенциальной энергией $\Pi_1 = -G \frac{mM}{R + h}$. Кроме того, спутник имеет кинетическую энергию $K_1 = \frac{mv_1^2}{2}$. На высоте H от Земли спутник обладает потенциальной энергией $\Pi_2 = -G \frac{mM}{R + H}$ и кинетической энергией $K_2 = \frac{mv_2^2}{2}$, где v_2 – скорость спутника на высоте H . Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv_1^2}{2} - G \frac{mM}{R + h} = \frac{mv_2^2}{2} - G \frac{mM}{R + H}.$$

По второму закону Кеплера площади, заметаемые радиусом-вектором спутника за равные промежутки времени, равны. На рисунке 75 это площади выделенных фигур. Если промежуток времени мал, скорости движения спутника вблизи точек 1 и 2 можно считать постоянными. Тогда вместо секторов можно рассматривать соответствующие равнобедренные треугольники. Запишем равенство их площадей:

$$\frac{1}{2} v_1 (R + h) \Delta t = \frac{1}{2} v_2 (R + H) \Delta t.$$

Из последних двух равенств найдем

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{2R + H + h} \frac{R + H}{R + h}}.$$

Тогда изменение скорости спутника равно

$$\Delta v = v_1 - v_0 = 2365 \text{ м/с}.$$

Теперь определим период T обращения спутника по эллиптической орбите. Согласно третьему закону Кеплера, отношение квадратов периодов обращения спутника равно отношению кубов больших полуосей. Поэтому

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \frac{(2R + H + h)^3}{8(R + h)^3},$$

где T_0 – период обращения спутника по круговой орбите радиусом $R + h$, который равен $2\pi(R + h)/v_0$. Следовательно,

$$T = \pi(2R + H + h)\sqrt{\frac{2R + H + h}{2GM}} \approx 12,1 \text{ ч.}$$

43. Энергия спутника равна (см. задачу 42)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R},$$

где R – радиус орбиты, v – скорость спутника. В случае круговой орбиты $v = \sqrt{G\frac{M}{R}}$, так что

$$E = \frac{1}{2}G\frac{mM}{R} - G\frac{mM}{R} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R}.$$

Если включить двигатель, разгоняя спутник, то E увеличится. Это, как видно, приведет к увеличению среднего радиуса орбиты, а так как квадраты периодов обращения спутников относятся как кубы больших полуосей их орбит, то период обращения спутника тоже увеличится. Старая и новая орбиты спутника будут проходить через одну и ту же точку (в которой включался двигатель). Однако теперь второй спутник будет приходить в эту точку через больший промежуток времени, чем первый, и, следовательно, расстояние между спутниками начнет увеличиваться. Так состыковаться не удастся.

Как же состыковать спутники? Для этого можно, например, сообщить импульс «назад». Тогда орбитой станет эллипс с меньшей, чем радиус окружности, большой полуосью, а период обращения спутника уменьшится. Благодаря этому спутники в области пересечения их орбит будут сближаться. После сближения можно увеличить скорость спутника, чтобы сделать ее такой же, как у первого, и осуществить «мягкую» стыковку.

44. Обозначим скорость налетающего шара до столкновения v_0 , после столкновения v и скорость покоящегося шара после столкновения u . Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}mv^2, \quad mv_0 = Mu + mv.$$

Решая эти уравнения совместно, найдем

$$u = v_0 \frac{2}{k+1},$$

где $k = \frac{M}{m}$ — отношение масс шаров.

Теперь можно найти энергию, переданную первоначально покоящемуся шару:

$$E = \frac{Mu^2}{2} = 4k \frac{mv_0^2}{2} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Так как $\frac{mv_0^2}{2} = E_0$ — это начальная энергия налетающего шара, то

$$E = 4E_0 \frac{k}{(k+1)^2}.$$

Исследуем полученное выражение. Очевидно, что при $k = 0$ и $k \rightarrow \infty$ энергия $E \rightarrow 0$. Так как функция $\frac{k}{(k+1)^2}$ непрерывна, то при некотором значении k она будет максимальна. Ясно, что максимум функции соответствует минимуму выражения $\frac{(k+1)^2}{k} = k + \frac{1}{k} + 2$, или $k + \frac{1}{k}$. Но так как $k + \frac{1}{k} \geq 2\sqrt{k \cdot \frac{1}{k}} = 2$, то его минимальное значение равно 2, т.е. $k + \frac{1}{k} = 2$. Отсюда найдем, что при этом $k = 1$. Следовательно, налетающий шар теряет максимальную часть своей кинетической энергии при столкновении с шаром той же массы. График зависимости $E(k)$ показан на рисунке 76.

Теперь понятно, что для того чтобы замедлить нейтроны, т.е. отобрать у них максимально возможную часть энергии, необходимо, чтобы нейтроны сталкивались с атомами как можно более близкой массы — лучше всего с ядрами атомов водорода. Поэтому для защиты от нейтронов и используются водородосодержащие вещества.

Формула для E позволяет понять также одну из основных трудностей, с которой сталкивается осуществление управляемого термоядерного синтеза. Для того чтобы такой синтез стал возможен, дейтериевая или дейтерий-тритиевая плазма должна быть нагрета до температуры в несколько сотен миллионов градусов ($10^8 - 10^9$ К). Соответствующую энергию должны иметь ионы дейтерия и трития.

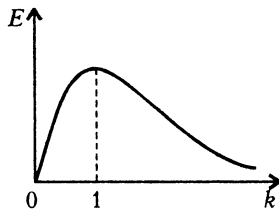


Рис. 76

Самый простой способ увеличения энергии заряженных частиц – воздействие на них электрического поля. Но при этом практически вся энергия воспринимается электронами, имеющими большую длину свободного пробега. Конечно, в дальнейшем энергии электронов и ионов должны постепенно выравниваться. Однако из-за большого соотношения масс при каждом столкновении электрон передает иону очень маленькую энергию и потому время установления теплового равновесия очень велико – больше времени удержания плазмы.

45. На кубик при ударе о стенку действуют две силы: сила нормальной реакции стенки и сила трения (рис.77). Разложим скорости кубика до и после столкновения со стенкой на составляющие, параллельные этим силам. Скорости $v_1 = v \sin \alpha$ и u_1 перпендикулярны стенке, а скорости $v_2 = v \cos \alpha$ и u_2 параллельны ей.

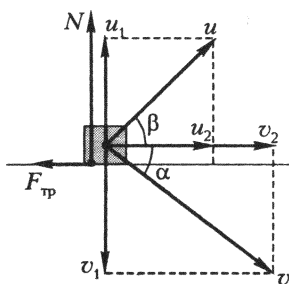


Рис. 77

В направлении, перпендикулярном стенке, между кубиком и стенкой, как обычно, происходит абсолютно упругий удар, в результате которого перпендикулярная составляющая скорости кубика меняется на противоположную:

$$u_1 = -v \sin \alpha .$$

Это означает, что составляющая импульса кубика, перпендикулярная стенке, меняется на $2mv \sin \alpha$, где m – масса кубика. Если время соударения кубика со стенкой τ , а средняя абсолютная величина силы реакции стенки $N_{\text{ср}}$, то, согласно второму закону Ньютона, изменение составляющей импульса кубика, перпендикулярной стенке, равно импульсу силы реакции, т.е.

$$2mv \sin \alpha = N_{\text{ср}} \tau .$$

Если бы на кубик не действовала сила трения, то составляющая импульса кубика, параллельная стенке, не изменилась бы и кубик отскочил бы от стенки под тем же углом α , под которым двигался к ней до удара. Однако благодаря действию силы трения в нашем случае меняется и составляющая v_2 скорости кубика. Предположим вначале, что средняя сила трения $F_{\text{тр.ср}} = N_{\text{ср}} \mu$, действующая на кубик, такова, что за время взаимодействия кубика со стенкой параллельная составляющая скорости кубика не успевает уменьшиться до нуля. В этом случае

$$mu_2 - mv_2 = -F_{\text{тр.ср}} \tau , \text{ или } mu_2 = mv \cos \alpha - N_{\text{ср}} \mu \tau .$$

Но $N_{\text{ср}} \tau = 2mv \sin \alpha$, поэтому

$$mu_2 = mv \cos \alpha - 2\mu mv \sin \alpha, \text{ или } u_2 = v(\cos \alpha - 2\mu \sin \alpha).$$

Следовательно, кубик отскочит под углом β таким, что

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{u_1}{u_2} \right| = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - 2\mu \operatorname{tg} \alpha}.$$

Однако если $\operatorname{tg} \alpha > \frac{1}{2\mu}$, то кубик будет проскальзывать относительно стенки не все время удара, а только до тех пор, пока составляющая его скорости, параллельная стенке, не обратится в ноль. Вместе с ней обратится в ноль и сила трения, действующая на кубик, и кубик отскочит под углом 90° к стенке.

46. Перейдем в систему отсчета, связанную с ногой футболиста. В этой системе отсчета покоящийся относительно земли мяч налетает на ногу с некоторой скоростью.

Если при ударе не происходит потери энергии, то мяч отлетает с той же скоростью, и, следовательно, его скорость относительно земли равна удвоенной скорости ноги. Потери энергии приводят к тому, что скорость мяча будет меньше. В случае абсолютно неупругого удара скорость мяча равна скорости ноги, и тогда дальность полета мяча примерно в четыре раза меньше дальности его полета при абсолютно упругом ударе.

Рассмотрим, чем определяются потери энергии. При ударе деформации ботинка и мяча являются упругими (если только мяч накачан не слишком слабо), так как после удара и ботинок и мяч восстанавливают свою форму. Однако восстанавливать свою форму мяч и ботинок могут не одновременно, и тогда мяч отскочит, не получив всей запасенной при ударе потенциальной энергии деформации. При ударе и деформации соприкасающихся частей ботинка и мяча в них возникают бегущие волны сжатия. Если эти волны возвращаются назад одновременно, то их энергия почти полностью переходит в кинетическую энергию мяча. Если мяч недостаточно накачан или «перекачан», одна из волн приходит раньше, и мяч отскакивает, не получив всей энергии упругой деформации.

47. Атом, излучив фотон с энергией $h\nu$ и импульсом $P_\phi = \frac{h\nu}{c}$, приобретает импульс \vec{mv}_1 . Из закона сохранения импульса следует, что вектор \vec{mv} начального импульса атома и векторы \vec{mv}_1 и \vec{P}_ϕ образуют треугольник (рис.78). Поэтому

$$(mv_1)^2 = (mv)^2 + \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - 2mv \frac{h\nu}{c} \cos \alpha.$$

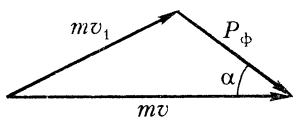


Рис. 78

Кроме того, согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + h\nu - \Delta E,$$

где ΔE — изменение внутренней энергии атома.

Для излучения первоначально покоящимся атомом мы можем записать

$$0 = mu - \frac{h\nu_0}{c} \text{ и } \Delta E = \frac{mu^2}{2} + h\nu_0,$$

где u — скорость атома после излучения. Из этих уравнений найдем

$$\Delta E = h\nu_0 \left(1 + \frac{h\nu_0}{2mc^2} \right).$$

Теперь нетрудно получить

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu} \left(1 + \frac{h}{2mc^2} (\nu + \nu_0) \right) = \frac{\nu}{c} \cos \alpha.$$

Для малых (оптических) частот можно пренебречь вторым членом в квадратных скобках. В результате получим

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu} \approx \frac{\nu}{c} \cos \alpha.$$

Это — формула Доплера.

Итак, движущийся атом излучает свет, частота которого отличается от частоты излучения покоящегося атома. Если атом движется к наблюдателю, то частота излучения ν больше ν_0 , а длина волны λ меньше λ_0 . При движении от наблюдателя $\cos \alpha = -1$, $\Delta \nu < 0$, т.е. $\nu < \nu_0$, а $\lambda > \lambda_0$. Уменьшение частоты излучения, которое приходит к нам от далеких звезд (красное смещение), позволяет измерять их лучевые скорости. Более того, эффект Доплера позволяет определить, вращается ли звезда, расширяется ли ее газовая оболочка и так далее.

Эффект Доплера позволяет также измерять на расстоянии температуру различных объектов. Так как атомы вещества находятся в хаотическом тепловом движении, то частота излучения имеет непрерывный набор значений от $\nu - \Delta \nu$ до $\nu + \Delta \nu$, где $\Delta \nu$ определяется

скоростью теплового движения $v \sim \sqrt{\frac{RT}{M}}$ (здесь R — универ-

сальная газовая постоянная, M – молярная масса вещества, T – температура тела), т.е. говорят, что спектральная линия уширяется. По уширению линии нетрудно найти v , а затем и температуру T тела.

Это, конечно, только некоторые из применений эффекта Доплера в современной физике и технике.

48. При излучении γ -кванта его энергия меньше разности внутренних энергий ядра на величину энергии движения самого ядра из-за отдачи. Для того чтобы γ -квант мог поглотиться ядром, его энергия должна быть больше, чем разность внутренних энергий ядра, на величину кинетической энергии, которую атом приобретает после поглощения.

Если атом является узлом решетки, то отдача может восприниматься всем кристаллом в целом, а так как его масса много больше массы одного атома, энергия отдачи мала. В этом случае γ -квант, излученный ядром атома, может поглотиться ядром атома такого же кристалла (эффект Мёссбауэра).

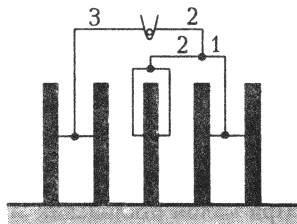


Рис. 79

49. На рисунке 79 изображена соответствующая конструкция подвески передних колес. Цифры показывают относительную длину соответствующей части рычага.

50. Сила может зависеть только от диаметра d столба, коэффициента трения μ между столбом и канатом и от силы F . Из соображений размерности следует, что $f \sim F$. Действительно, никакая другая комбинация величин F , μ и d не будет иметь размерность силы (μ – безразмерная величина). Таким образом,

$$f = kF,$$

где k – константа, которая определяется величиной μ . Причем при любом изменении диаметра столба сила f останется прежней.

Найдем теперь, как изменится сила f при намотке на столб n витков каната. Для второго витка роль силы F играет сила f . Следовательно,

$$f_2 = kf = k^2 F,$$

где f_2 – сила, которую нужно приложить к свободному концу каната при двух витках. Для третьего витка

$$f_3 = kf_2 = k^3 F.$$

Для n -го витка получим

$$f_n = k^n F = \left(\frac{f}{F}\right)^n F.$$

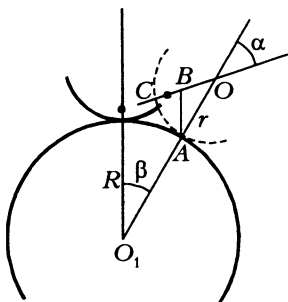


Рис. 80

гольника OAB имеем

$$\frac{OB}{\sin \beta} = \frac{AO}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} = \frac{r}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{r}{\sin(\alpha(1 + r/R))}.$$

При малом отклонении $\sin(\alpha(1 + r/R)) \approx \alpha(1 + r/R)$ и $\sin \beta \approx \beta$. Поэтому

$$\frac{OB}{\alpha r/R} = \frac{r}{\alpha(1 + r/R)}, \text{ или } OB = \frac{r^2}{R + r}.$$

Положение равновесия устойчиво, если $OC > OB$, т.е. если

$$\frac{r}{2} > \frac{r^2}{R + r}, \text{ или } R > r.$$

52. При малых относительных деформациях пружина является упругой, т.е. целиком восстанавливает свою форму и размеры после освобождения ее концов. Если же относительные деформации велики, пружина становится пластичной, возникает остаточная деформация. Длина пружины становится больше начальной длины l_0 , если пружину растягивали, и меньше l_0 , если ее сжимали. Воспользуемся этим свойством пружины для решения задачи.

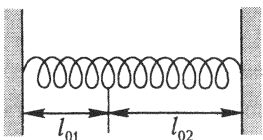


Рис. 81

Возьмем закрепленную на концах пружину за виток, который находится ближе к одному концу пружины, чем к другому (рис.81), и сдвинем этот виток к дальнему концу пружины. Одна часть пружины окажется растянутой, а другая – сжатой. При этом их абсолютные деформации Δl будут одинаковыми, а относительные деформации – разными. Относительная деформация $\Delta l/l_{01}$ короткой части пружины будет больше, чем относительная деформация $\Delta l/l_{02}$

длинной части пружины:

$$\frac{\Delta l}{l_{01}} > \frac{\Delta l}{l_{02}}.$$

Это означает, что можно подобрать такие Δl , l_{01} и l_{02} , что деформация длинной части пружины будет еще упругой, а короткой части – уже пластичной. После такой «обработки» длина длинной части (которая была сжата) останется прежней, а длина короткой части (которая была растянута) увеличится. Увеличится и длина всей пружины в недеформированном состоянии. Следовательно, закрепленная на концах пружина будет стремиться удлиниться.

Аналогично, если рассматриваемый виток пружины сдвинуть к ближнему концу пружины и приложить внешние усилия такие, чтобы деформация длинной (растянутой) части пружины была упругой, а деформация короткой (сжатой) части пластичной, то пружина после обработки будет стремиться сократиться.

53. Потянув за одно из звеньев цепочки (рис.82), ей можно придать форму стержней. При этом будет произведена работа, которая, очевидно, идет на увеличение потенциальной энергии цепочки, т.е. на подъем ее центра тяжести. Так как в новом положении центр тяжести цепочки совпадает с положением центра тяжести стержней, ясно, что центр тяжести свободно висящей цепочки расположен ниже центра тяжести стержней.

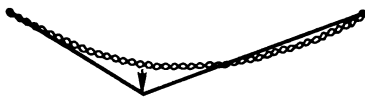


Рис. 82

54. Наинизшее положение центр тяжести стакана с сахаром занимает тогда, когда он находится на уровне сахара в стакане. Действительно, если уровень сахара лежит ниже центра тяжести системы, то центр тяжести понижается при досыпании в стакан сахара (при этом увеличивается масса ниже центра тяжести). Если же уровень сахара лежит выше центра тяжести системы, то центр тяжести опустится, если высыпать часть сахара выше него. Заполненный соответствующим образом стакан наиболее устойчив.

55. Если давление в трубе равно p , то на единицу длины поперек трубы приходится сила $F_1 = p \frac{S_{\text{горца}}}{2\pi R} = \frac{pR}{2}$, где R – радиус трубы. Вдоль трубы на единицу длины приходится сила $F_2 = \frac{pl \cdot 2R}{2l + 4R} \approx pR$, т.е. вдвое больше чем F_1 . Поэтому труба всегда лопаётся вдоль, а не поперек.

По этой же причине лопаются вдоль сардельки при варке.

56. Для того чтобы щетка удерживалась в равновесии, нужно в случае ее отклонения от положения равновесия, т.е. поворота на некоторый угол, успеть подвинуть палец так, чтобы щетка вновь

оказалась в положении равновесия. Щетка будет отклоняться медленнее, чем палка той же длины, так как центр тяжести щетки лежит выше центра тяжести палки. (Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрите, как зависит время падения легкого стержня с укрепленным на его конце тяжелым шаром от длины стержня.) Поэтому щетку удерживать легче, чем палку.

57. Для того чтобы сохранять равновесие при езде на велосипеде, нужно, теряя равновесие, т.е. наклоняясь в какую-нибудь сторону, всегда поворачивать руль в ту же сторону, в которую падаешь. При езде «без рук» это происходит автоматически благодаря тому, что ось переднего колеса, а вследствие этого и центр масс вилки и колеса велосипеда, не проходит через ось руля, а лежит несколько впереди нее. Наоборот, чтобы повернуть, надо согнуться так, чтобы наклонить велосипед в сторону поворота.

58. Давление p на стол в тот момент, когда вода начинает подтекать, равно $\rho g R$, а сила давления (сила, действующая на стол) равна

$$F = pS = \pi \rho g R^3.$$

Эта же сила равна общему весу колокола и воды, т.е.

$$F = mg + \frac{2}{3} \pi R^3 \rho g.$$

Следовательно,

$$mg + \frac{2}{3} \pi R^3 \rho g = \pi \rho g R^3.$$

Отсюда

$$m = \frac{1}{3} \pi \rho R^3.$$

59. Независимо от того, какой сосуд нагревается, вода потечет направо.

Пусть нагревается жидкость в правом сосуде. Тогда она расширится и займет больший объем. Если бы сосуд был цилиндрическим (рис.83), давление жидкости на дно не изменилось бы: уменьшение плотности воды в точности скомпенсировалось бы увеличением высоты столба жидкости. Это следует из того, что сила давления на дно цилиндрического сосуда, с одной стороны, равна силе тяжести, действующей на находящуюся в сосуде воду, а с другой стороны, равна давлению жидкости на дно, умноженному на площадь дна, т.е. pS . Так как ни сила тяжести, ни площадь дна при нагре-

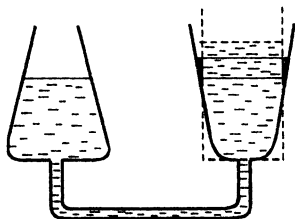


Рис. 83

вании жидкости не меняются, то и давление на дно цилиндрического сосуда не меняется.

В коническом расширяющемся сосуде при таком же уменьшении плотности жидкости увеличение высоты столба меньше, чем в цилиндрическом сосуде. Это происходит по двум причинам: во-первых, расширяется меньшее количество жидкости, а значит, меньше изменение ее объема; во-вторых, при расширении вода должна заполнить «боковой» объем (выделенный на рисунке). Поэтому давление на дно сосуда при нагревании жидкости уменьшается. Так как при равновесии жидкости в трубке, соединяющей сосуды, давление у ее конца в левом сосуде должно быть равно давлению у ее конца в правом сосуде, то жидкость будет перетекать из левого сосуда в правый.

60. После открывания крана K_1 и установления равновесия давление на дно в обоих сосудах одинаково, поэтому, так как температуры, а следовательно, и плотности жидкостей различны, уровень жидкости в сосуде с большей температурой и (соответственно) меньшей плотностью жидкости выше, чем в другом сосуде. Нарисуем график зависимости давления в каждом из сосудов от высоты (рис.84), где p_0 – атмосферное давление. На той высоте, на которой находится верхняя трубка, давления в сосудах равны p_1 и p_2 . И так как $p_1 > p_2$, то при открывании крана K_2 жидкость будет переливаться по верхней трубке из сосуда с большей температурой в сосуд с меньшей температурой. Но уровень воды в каждом из сосудов должен оставаться неизменным, так как только в этом случае давления на дно обоих сосудов будут одинаковы. А значит, по нижней трубке, соединяющей сосуды, жидкость будет перетекать из сосуда с меньшей температурой в сосуд с большей температурой.

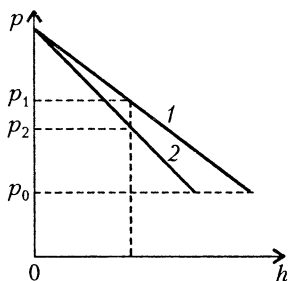


Рис. 84

61. Система из трубок будет работать как сифон. Из верхней бочки вода будет перетекать в среднюю и нижнюю. Кроме того, из средней бочки вода будет перетекать в нижнюю. Так как скорость перетекания воды по сифону пропорциональна разности уровней воды в сосудах, то, когда уровень воды в средней бочке будет ближе к уровню воды в нижней бочке, чем в верхней, в среднюю бочку из верхней будет перетекать больше воды, чем из средней бочки в нижнюю. В этом случае будут наполняться как нижняя, так и средняя бочки. Если же уровень воды в средней бочке ближе к уровню воды в верхней, чем в нижней, то будет наполняться лишь нижняя бочка за счет вытекания воды из верхней и средней бочек.

62. Водосброс (масса воды, протекающая в одну секунду) определяется высотой уровня воды над плотиной и зависит от плотности воды и ускорения свободного падения:

$$\mu = f(\rho, g, h).$$

Из соображений размерности нетрудно получить

$$\mu = k\rho g^{3/2} h^{5/2}$$

(k – безразмерная постоянная). При возрастании водосброса втрое $h^{5/2}$ вырастает втрое и, следовательно, h возрастает в $\sqrt[5]{9}$ раз, т.е. примерно в 1,5 раза.

63. Чтобы объяснить, что происходит с песком на берегу реки, начнем с ... обычных шариков. Одинаковые шарики можно уложить на плоскости так, чтобы каждый из них касался других шаров. Затем в лунки между шарами первого слоя можно положить шары второго слоя. Они будут касаться трех шаров нижнего слоя и шести соседей своего слоя и т.д. Полученное таким образом расположение шаров называется плотной упаковкой шаров. Если нарушить плотную упаковку, выведя шары одного из слоев из лунок между шарами нижнего слоя, промежутки между шарами увеличатся. Возрастет и объем всей системы. Это означает, что если на систему из плотно упакованных шаров действуют силы, приводящие к нарушению плотной упаковки, объем системы увеличивается за счет увеличения промежутков между шарами.

Аналогично ведет себя и любая другая зернистая среда. Возьмите, например, пшено (или кофе), наполните им стакан, слегка встряхивая его, чтобы зерна располагались образуя наиболее плотную из возможных упаковку. Затем надавите на пшено. Давление приведет к увеличению объема, занимаемого зернами, т.е. к нарушению плотной упаковки. Если теперь слегка постучать по стакану с тем, чтобы зерна вновь «упаковались» наиболее плотно, стакан окажется не заполненным доверху.

Теперь вернемся к песку на берегу. Он тоже плотно упакован. При давлении на песок плотная упаковка разрушается, и объем песка увеличивается за счет увеличения пространства между песчинками. Вода из верхних слоев песка уходит вглубь, заполняя эти увеличивающиеся промежутки. Песок как бы «высыхает». Когда ногу убирают, плотная упаковка восстанавливается, а вытесненная из уменьшившихся вновь промежутков вода заполняет след, оставленный ногой.

64. Пусть центр шарика слегка сместится относительно оси струи. На шарик под струей воды действуют со стороны струи две силы: сила давления, направленная к центру шарика и стремящаяся вытолкнуть шарик из-под струи, и сила трения, направленная по касательной и стремящаяся вращать шарик. Так как шарик частично

погружен в воду, между шариком и водой действуют силы вязкости и вращение шарика вызовет его качение в сторону струи. При достаточно больших отклонениях центра шарика от оси струи горизонтальная составляющая силы давления уменьшается, а действие трения увеличивается, поэтому шарик будет возвращаться под струю. Таким образом, шарик будет колебаться под струей. При более слабой струе возвращающие силы будут слабее, колебания шарика будут происходить медленнее и с большей амплитудой. Если амплитуда колебаний превысит радиус шарика, то он выскочит из-под струи.

65. Когда воздух выдувают тонкой струей, его скорость велика. Поэтому давление в струе меньше атмосферного, отчего струей захватывается окружающий холодный воздух, не насыщенный водяными парами, и «поставляется» в область над свободной поверхностью чая.

В другом случае выдыхается теплый, насыщенный парами воздух, скорость которого мала. Он-то и попадает на руку.

66. Из-за вихрей, образующихся при обтекании дюн ветром, с наветренной стороны дюн образуется спокойная зона с пониженным давлением. В этой зоне выпадает песок, захваченный ветром с подветренной стороны.

Так же объясняется перемещение песчаных отмелей.

67. В начале движения реактивного снаряда его скорость относительно самолета в течение некоторого промежутка времени меньше скорости самолета. Поэтому относительно воздуха снаряд движется в том же направлении, что и самолет, т.е. стабилизаторами вперед. Стабилизаторы разворачивают снаряд в направлении движения самолета так, чтобы его сопротивление набегающему потоку воздуха было минимальным; затем за счет реактивной тяги скорость снаряда увеличивается, и он догоняет самолет.

68. Извилистое течение рек связано с тем, что их прямолинейное течение неустойчиво. Это означает, что при случайном образовании небольшой извилины или неоднородности течения реки (например, из-за упавшего в воду дерева) изгиб реки будет увеличиваться. Для того чтобы разобраться, почему это происходит, рассмотрим ... стакан с чаем, в котором плавают чайники. Если ложкой «раскрутить» чай в стакане, заставив жидкость вращаться, и затем вынуть ложку из стакана, то через некоторое время все чайники соберутся вдоль оси стакана. Связно это вот с чем.

При вращении жидкости в стакане на каждую из частиц жидкости действует со стороны других окружающих ее частиц такая сила, что равнодействующая этой силы и силы тяжести направлена горизонтально и сообщает частице центростремительное ускорение $a = \omega^2 R$, где ω – угловая скорость вращения жидкости и R – расстояние, на котором находится частица от оси вращения. Чем

больше расстояние R , тем больше ускорение частицы, значит, тем больше должна быть горизонтальная составляющая силы, действующей на эту частицу со стороны других частиц. Вот почему поверхность вращающейся жидкости принимает форму параболоида. (Напомним, что сила, действующая на частицу жидкости, которая находится у поверхности, со стороны других частиц, перпендикулярна к поверхности. Иначе составляющая этой силы, параллельная поверхности, вызвала бы движение частиц жидкости.) Благодаря такой форме поверхности жидкости давление в ней на одном и том же расстоянии от дна увеличивается по мере приближения к стенкам стакана.

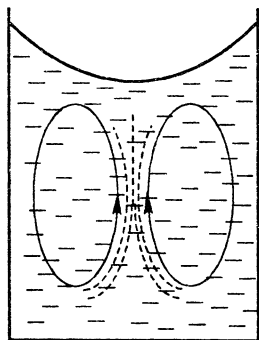


Рис. 85

После того как вынули ложку из стакана, скорость частиц жидкости у стенок стакана и у дна начинает уменьшаться из-за трения. При этом ускорение, сообщаемое этим частицам действующими на них силами, оказывается больше центростремительного, и в

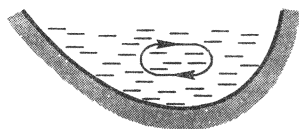


Рис. 86

стакане возникает течение жидкости такое, как показано на рисунке 85. Из-за трения скорость этого течения у поверхности меньше его скорости на некоторой глубине. Это течение и переносит чаинки к оси вращения жидкости.

Подобное же круговое поперечное течение возникает и в реке там, где река делает поворот. Этим течением частицы песка со дна и от наружного берега реки переносятся к ее внутреннему берегу. Таким образом, круговое течение увеличивает изгиб реки, размывая ее наружный берег. Более того, эрозия — разрушение берега и дна — сказывается сильнее у наружного берега реки. Поэтому дно реки принимает профиль, показанный на рисунке 86.

69. При движении человека на него со стороны лодки действует сила, равная

$$F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t},$$

где m — масса человека и v — его скорость. Такая же по абсолютной величине сила действует на лодку, но направлена она в другую сторону. Кроме того, на лодку действует сила сопротивления $F_c = ku$, где k — константа и u — скорость лодки. Итак, для лодки

массой M

$$-F + ku = \frac{\Delta(Mu)}{\Delta t},$$

или

$$-\frac{\Delta(mv)}{\Delta t} + ku = \frac{\Delta(Mu)}{\Delta t}.$$

Отсюда

$$ku\Delta t = \Delta(Mu) + \Delta(mv),$$

или, так как $u\Delta t = \Delta x$ — это смещение лодки,

$$k\Delta x = \Delta(Mu) + \Delta(mv).$$

В конце концов лодка и человек в ней останутся. Тогда $\Delta(Mu)$ и $\Delta(mv)$ будут равны нулю. Следовательно, в этот момент нулю будет равно и смещение Δx лодки.

70. Линия останется прямой, так как смещение каждой точки радиуса монеты пропорционально расстоянию между этой точкой и центром монеты.

71. Обозначим x расстояние от нижнего края листа до точки O , которая остается неподвижной относительно крыши при нагревании листа (рис.87). Силы трения, действующие на участки листа выше и ниже точки O , направлены так, как показано на рисунке, и равны по абсолютной вели-

чине $F_{\text{тр}1} = \mu \frac{m}{l} gx \cos \varphi$ и $F_{\text{тр}2} = \mu \frac{m}{l} g(l-x) \cos \varphi$ (где m — масса

листа, а $\frac{m}{l}$ — масса единицы длины листа, l — длина листа при температуре $t_1 = 20^\circ \text{C}$). Так как

лист нагревается медленно, можно считать, что в любой момент он находится в равновесии и сумма проекций на ось X сил, действующих на лист, равна нулю:

$$mg \sin \varphi - \mu \frac{m}{l} gx \cos \varphi + \mu \frac{m}{l} g(l-x) \cos \varphi = 0.$$

Отсюда найдем

$$x = l \frac{\sin \varphi + \mu \cos \varphi}{2\mu \cos \varphi}.$$

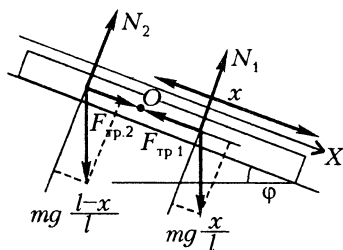


Рис. 87

Если весь лист при нагревании удлиняется на Δl , то удлинение нижней части листа равно $\frac{x}{l} \Delta l$, так что при нагревании листа его нижний край опускается на

$$\Delta x = \frac{x}{l} \Delta l = \frac{\sin \varphi + \mu \cos \varphi}{2\mu \cos \varphi} \Delta l.$$

Аналогично найдем расстояние Δy , на которое поднимается нижний край листа при охлаждении. В этом случае неподвижна уже другая точка O' листа, а направления сил трения меняются на противоположные. Учитывая это, найдем

$$\Delta y = \frac{\mu \cos \varphi - \sin \varphi}{2\mu \cos \varphi} \Delta l.$$

За цикл изменения температуры нижний край листа опускается на $\Delta x - \Delta y$, а за n суток лист сползет на

$$\Delta L = n \Delta l \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\mu} = n \alpha l_0 (t_1 - t_2) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\mu}.$$

Подставляя сюда численные данные, получим

$$\Delta L \approx 2,5 \text{ см.}$$

72. Молекулы диффундирующего вещества движутся хаотически, как и молекулы любого газа. Это означает, что после столкновения с молекулой воздуха направление движения молекулы диффундирующего вещества может быть совершенно произвольным. Если проследить за такой молекулой, то ее траектория представляет собой ломаную, n -е звено которой может быть направлено совершенно произвольно по отношению к $(n-1)$ -му (рис.88).

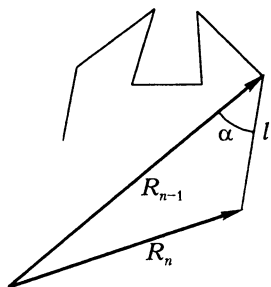


Рис. 88

Обозначим l среднюю длину одного звена. Это – расстояние, которое пролетает молекула между двумя последовательными столкновениями. Его называют поэтому длиной свободного пробега.

Обозначим еще \vec{R}_n перемещение частицы за n шагов, \vec{R}_{n-1} – перемещение за $(n-1)$ шаг, а α – угол между вектором \vec{R}_{n-1} и следующим шагом. Тогда, согласно теореме косинусов,

$$R_n^2 = R_{n-1}^2 + l^2 - 2R_{n-1}l \cos \alpha.$$

Усредним это равенство:

$$\overline{R_n^2} = \overline{R_{n-1}^2} + l^2 - 2\overline{R_{n-1}l \cos \alpha}.$$

Но α может принимать любые значения и равновероятны все значения $\cos \alpha$, как положительные, так и отрицательные. Поэтому $\cos \alpha = 0$ и

$$\overline{R_n^2} = \overline{R_{n-1}^2} + l^2.$$

Воспользовавшись этим соотношением, мы можем записать следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\overline{R_1^2} &= l^2, \\ \overline{R_2^2} &= \overline{R_1^2} + l^2, \\ \overline{R_3^2} &= \overline{R_2^2} + l^2, \\ &\dots \dots \dots \\ \overline{R_n^2} &= \overline{R_{n-1}^2} + l^2.\end{aligned}$$

Теперь сложим их. Тогда все промежуточные величины сократятся, и мы получим

$$\overline{R_n^2} = nl^2.$$

Число шагов n пропорционально времени t наблюдения над молекулой:

$$n = \frac{t}{\tau},$$

где τ — время свободного пробега. Оно равно l/v , где v — средняя скорость теплового движения молекул. Поэтому

$$\overline{R_n^2} = \frac{t}{\tau} l^2 = tvl.$$

Среднее значение $\overline{R_n}$ не равно $\sqrt{\overline{R_n^2}}$, но близко к нему. Поэтому можно считать, что

$$R = \overline{R_n} \approx \sqrt{vlt}.$$

Мы видим, что $R \sim \sqrt{t}$. Поэтому если на расстояние 1 м пахучее вещество распространилось за 3,5 минуты, то на расстояние 10 м оно распространится за $3,5 \cdot 100$ минут, т.е. примерно за 6 часов!

Последняя формула справедлива не только для молекулы диффундирующего вещества, но и для молекул самого газа. Справедлива она и для совершающей беспорядочные перемещения броуновской частицы, что было установлено А.Эйнштейном в 1905 году.

Интересно сравнить среднее перемещение молекул газа, скажем, за 1 секунду с расстоянием L , которое пролетает за это время молекула. Например, при атмосферном давлении и комнатной температуре для молекулы азота в воздухе ($v \approx 500$ м/с, а $l \approx 6 \cdot 10^{-8}$ м) имеем

$$L \sim 500 \text{ м/с} \cdot 1 \text{ с} = 500 \text{ м}, \text{ а } R \sim 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 5,5 \text{ мм}.$$

Из-за хаотичности движения молекул R меньше L в 10^5 раз!

Формула для R позволяет установить зависимость R от температуры газа T . Для этого прежде всего выясним, чем определяется величина длины свободного пробега l . Будем считать, что молекула

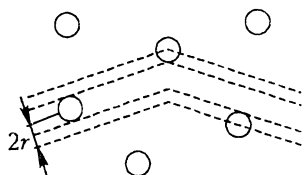


Рис. 89

— это шарик радиусом r . За время Δt молекула при своем движении столкнется с теми молекулами, центры которых лежат в цилиндре радиусом $2r$ и длиной $v\Delta t$ (рис. 89). Если концентрация газа n , то таких молекул

$$N = n\pi(2r)^2 v\Delta t.$$

Разделив путь $v\Delta t$, пройденный молекулой, на число столкновений N , найдем l :

$$l = \frac{1}{4\pi r^2 n}.$$

Но, согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории, $p = nkT$, где p — давление, k — постоянная Больцмана. Поэтому

$$n = \frac{p}{kT}, \text{ и } l = \frac{kT}{4\pi r^2 p}.$$

Кроме того, средняя скорость теплового движения молекул $v = \sqrt{3kT/m}$, где m — масса молекулы. Следовательно,

$$R \approx \sqrt{\left(\frac{3kT}{m}\right)^{1/2} \frac{kT}{4\pi r^2 p} t}, \text{ или } R \sim p^{-1/2} T^{3/4} t^{1/2}.$$

Вот как R зависит от времени t , давления p газа и его температуры T .

73. При решении многих задач нам понадобится формула для числа z молекул газа, попадающих на поверхность площадью S за время t :

$$z = \frac{1}{2} n S \overline{|v_x|} t,$$

где n — концентрация молекул газа и $\overline{|v_x|}$ — среднее значение модуля

проекции скорости молекул на ось X , перпендикулярную к поверхности. Так как

$$\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = v^2 = \frac{3RT}{M},$$

где v – средняя тепловая скорость молекул газа, M – молярная масса газа, T – его температура, а R – универсальная газовая постоянная, то

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{RT}{M},$$

и можно считать, что

$$|\overline{v_x}| \approx \sqrt{\overline{v_x^2}} = \sqrt{\frac{RT}{M}}.$$

Более аккуратный расчет показывает, что

$$|\overline{v_x}| = \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{RT}{M}}.$$

Для наших расчетов это, впрочем, несущественно. Используя найденное выражение для $|\overline{v_x}|$, получим

$$z = \frac{1}{4} n S v t = \frac{1}{4} n S t \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Этой формулой мы неоднократно будем пользоваться.

Каждый атом гелия, перелетая от внутренней горячей к наружной холодной стенке колбы, переносит энергию $E_1 = \frac{3}{2} k T_{\text{вн}}$. Улетая от наружной стенки, он несет энергию $E_2 = \frac{3}{2} k T_0$, где T_0 – температура в комнате. Поэтому за время t от внутренней к наружной стенке колбы переносится количество теплоты

$$q = (E_1 - E_2) z = \frac{3}{8} k n S v (T_{\text{вн}} - T_0) t.$$

Так как изменение температуры чая ΔT мало по сравнению с начальной разностью температур чая $T = 363$ К и воздуха в комнате $T_0 = 293$ К ($\Delta T = 10$ К, а $T - T_0 = 70$ К), то $T_{\text{вн}} - T_0 \approx T - T_0$. Кроме того, для оценки можно считать, что температура гелия в колбе

равна среднему арифметическому T и T_0 , так что $v = \sqrt{\frac{3RT_{\text{ср}}}{M}}$, где

$T_{\text{ср}} = (T + T_0)/2$. Далее, согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории, $p = nkT$, так что для гелия в колбе

$n = p/(kT_{\text{ср}})$. Поэтому

$$q = \frac{3}{8} pS \sqrt{\frac{3R}{MT_{\text{ср}}}} (T - T_0)t.$$

Для того чтобы температура чая понизилась на $\Delta T = 10$ К, должно быть перенесено количество теплоты $Q = mc\Delta T$, где $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К) – удельная теплоемкость воды и $m = 1$ кг – масса чая. Приравнявая q и Q , найдем время t :

$$t = \frac{8}{3} \frac{cm\Delta T}{pS(T - T_0)} \sqrt{\frac{MT_{\text{ср}}}{3R}}.$$

В эту формулу входит площадь S стенок колбы. Ее можно оценить, полагая, что колба сферична. Тогда $S = 4\pi r^2$, а объем колбы

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$, так что $S = 4\pi \left(\frac{3}{4} \frac{V}{\pi}\right)^{2/3}$. В нашем случае $S \approx 5 \cdot 10^{-2}$ м².

Подставляя все необходимые величины в формулу для t , найдем

$$t \approx 7 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 2 \text{ ч}.$$

Такой же результат мы получим и для случая, когда колба заполнена воздухом. Только в этом случае энергия E молекулы равна $\frac{5}{2}kT$, так как воздух состоит в основном из двухатомных молекул.

Заметим, что при большом давлении наш способ вычисления несправедлив, так как длина свободного пробега l невелика по сравнению с расстоянием L между стенками колбы. При $l \ll L$ механизм теплопроводности схож с механизмом диффузии, разобранным в предыдущей задаче.

74. Давление p в спутнике равно сумме парциальных давлений кислорода p_1 и азота p_2 , и так как $p_1 = n_1 kT$, а $p_2 = n_2 kT$, то

$$p = (n_1 + n_2)kT,$$

$$\Delta p = (\Delta n_1 + \Delta n_2)kT,$$

а

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta n_1 + \Delta n_2}{n_1 + n_2}.$$

Но изменения концентраций молекул (см. предыдущую задачу) равны, соответственно,

$$\Delta n_1 = \frac{z_1}{V} = \frac{1}{4} \frac{n_1 S v_1 t}{V} \text{ и } \Delta n_2 = \frac{z_2}{V} = \frac{1}{4} \frac{n_2 S v_2 t}{V}.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{4} \frac{St}{V} \frac{n_1 v_1 + n_2 v_2}{n_1 + n_2}.$$

Согласно уравнению газового состояния,

$$p_1 = \frac{1}{V} \frac{m_1}{M_1} RT, \quad p_2 = \frac{1}{V} \frac{m_2}{M_2} RT.$$

Тогда

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{M_2}{M_1} = \alpha \frac{M_2}{M_1},$$

где $\alpha = m_1/m_2$, и

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{4} \frac{S}{V} t \frac{\alpha M_2 v_1 + v_2 M_1}{\alpha M_2 + M_1}.$$

Подставив сюда $v_1 = \sqrt{\frac{3RT}{M_1}}$, $v_2 = \sqrt{\frac{3RT}{M_2}}$, $S = 4\pi r^2$, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$,

$\frac{\Delta p}{p} = 0,05$, $\alpha = \frac{1}{3}$, а также остальные величины, найдем

$$t \approx 4,7 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 1,3 \text{ ч.}$$

Интересно, а каков состав молекулярного пучка, вылетающего из спутника? Из соотношения

$$\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = \frac{n_1}{n_2} \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$$

видим, что отношение концентраций $\Delta n_1/\Delta n_2$ в молекулярном пучке, вылетающем в вакуум, в $\sqrt{M_2/M_1}$ раз больше отношения концентраций газов в сосуде. Процесс истечения газа из сосуда через маленькое отверстие называется эффузией. Мы показали, что с помощью эффузии можно обогащать газы. Ее, в частности, можно использовать для обогащения природного урана, который содержит изотопы урана ^{235}U и ^{238}U . Изотоп ^{235}U используется в атомных электростанциях, однако его концентрация в природном уране очень мала. Один из способов обогащения (впрочем, не самый лучший) — это использование многоступенчатой газовой эффузии. Для этого берут газообразное соединение природного урана с фтором UF_6 , которое содержит молекулы с изотопами урана: $^{235}\text{UF}_6$ и $^{238}\text{UF}_6$, и пропускают через трубу с отверстиями, через которые газ попадает в откачиваемый сосуд. Из-за близости молярных масс этих соединений концентрации меняются мало, поэтому полученный пучок пропускают вновь через такое же устройство, и т.д.

Необходимо отметить, что истекающий через отверстие пучок молекул обладает описанными свойствами только в том случае, когда длина свободного пробега велика по сравнению с размерами отверстия. Попробуйте самостоятельно, опираясь на решение задачи 72, оценить, при какой концентрации газа в спутнике длина свободного пробега будет порядка 1 см.

75. Если бы пар над жидкостью был насыщенным, то пар и жидкость находились бы в равновесии, и за любое время t из пара в жидкость попадало бы столько же молекул z , сколько их вылетает из жидкости. Следовательно, через поверхность жидкости площадью S за время t вылетает число молекул $z = \frac{1}{4} n S v t$ (см. задачу 73), где n – концентрация молекул в насыщенном паре и v – их тепловая скорость. Так как $n = \frac{p_n}{kT}$ и $v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ (здесь p_n – давление насыщенных паров воды), то

$$z = \frac{1}{4} \frac{p_n}{k} \sqrt{\frac{3R}{TM}} S t.$$

Разделив z на постоянную Авогадро, найдем, сколько молей воды испарится за время t :

$$\nu = \frac{z}{N_A} = \frac{1}{4} \frac{p_n}{N_A k} \sqrt{\frac{3R}{MT}} S t = \frac{1}{4} p_n \sqrt{\frac{3}{RTM}} S t$$

(так как $N_A k = R$). Теперь найдем массу m воды, испаряющейся с единицы площади поверхности в единицу времени (т.е. скорость испарения):

$$m = \frac{\nu M}{S t} = \frac{1}{4} p_n \sqrt{\frac{3M}{RT}}.$$

Подставляя в эту формулу $p_n = 2,3 \cdot 10^3$ Па, $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль и $T = 293$ К, получим, что $m = 2,6$ кг/(м² · с), т.е. с 1 м² поверхности воды за 1 с испаряется 2,6 кг воды.

Велика ли эта скорость? Найдем, за какое время испарится в вакууме (например, в космосе) стакан воды. Он содержит $M = 200$ г воды, а диаметр стакана равен примерно 7 см, так что $S = 3,8 \cdot 10^{-3}$ м². Поэтому $t = MS/m = 20$ с! Правда, если вынести стакан с водой в вакуум, то вода испарится не так быстро. Дело в том, что при испарении жидкость охлаждается, а при быстром испарении замерзает. Попробуем рассчитать, сколько воды останется в стакане. При испарении массы воды ΔM поглощается количество теплоты $q = r \Delta M$, где $r = 2,5 \cdot 10^6$ Дж/кг – удельная теплота

парообразования. Это тепло отбирается у массы воды $M - \Delta M$ при ее остывании от температуры $\Theta = 20^\circ\text{C}$ до нуля и превращении в лед. Поэтому

$$r\Delta M = c(M - \Delta M)\Theta + \lambda(M - \Delta M),$$

где $c = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$ – удельная теплоемкость воды и $\lambda = 3,2 \cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$ – удельная теплота плавления льда. Отсюда

$$\Delta M = \frac{cM\Theta + \lambda M}{r + c\Theta + \lambda} = 0,028 \text{ кг} = 28 \text{ г}.$$

Такая масса воды испарится, и в стакане останется 172 г льда. Лед же испаряется значительно медленнее. Благодаря этому считается, например, возможным наличие воды на Луне (в виде льда и пара). Согласно этой гипотезе, водяные пары, которые содержат лунные породы, поднимаются на поверхность и замерзают там, закупоривая, таким образом, поры.

А в обычных условиях, скажем в комнате, как быстро должен испариться стакан воды? Для того чтобы ответить на этот вопрос, нужно учесть конденсацию пара. Если давление пара в комнате равно p (влажность $\varphi = p/p_n$), то из z нужно вычесть число молекул

z_1 , попадающих в воду из пара: $z_1 = \frac{1}{4} \frac{p}{k} \sqrt{\frac{3R}{TM}}$. Это означает, что в формуле для m нужно p_n заменить на $p_n - p$, так что получим

$$m' = \frac{1}{4} (p_n - p) \sqrt{\frac{3M}{RT}}.$$

При влажности, скажем, 60% ($\varphi = 0,6$) и температуре $T = 293 \text{ K}$ (20°C) давление пара равно $p = 0,6p_n \approx 1,4 \cdot 10^3 \text{ Па}$. Тогда

$$m' = 1 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

Это всего в 2,6 раза меньше скорости испарения с единицы поверхности жидкости в вакууме. Значит, стакан воды в комнате должен испариться примерно в 2,6 раза быстрее, чем в вакууме, т.е. за 52 с – меньше минуты! В действительности же вода в стакане может находиться несколько суток. В чем же дело?

Можно назвать две причины. Во-первых, отнюдь не все молекулы, попадающие из пара на поверхность жидкости, ею удерживаются. Большинство молекул отражаются и возвращаются в пар. Поскольку в состоянии динамического равновесия число испарившихся молекул жидкости равно числу именно удержанных молекул пара, то в формулах для скоростей испарения должен появиться множитель, равный доле удержанных молекул. Если его

учесть, то оказывается, что тогда время испарения возрастет в 20 – 25 раз.

Во-вторых, даже если в комнате влажность меньше 100%, то в тонком слое у поверхности жидкости пар практически насыщен. Это связано с тем, что при испарении воды давление пара у поверхности возрастает, и начинается диффузия пара от поверхности. Но процесс диффузии очень медленный (см. задачу 72), и поэтому давление пара у поверхности практически равно p_n . Испарение можно несколько ускорить, если обдувать стакан потоком воздуха. Так поступают, например, когда хотят охладить чай. Дуя на него, мы увеличиваем конвекцию, ускоряем «отвод» молекул пара из приповерхностного слоя и повышаем скорость испарения. А испарение чая приводит к его охлаждению.

76. В обоих коленах трубки над поверхностью воды находятся только насыщенные водяные пары, давление которых, как известно, не зависит от объема.

77. Давление насыщенного пара у поверхности капли зависит от ее радиуса. Действительно, представим себе замкнутый сосуд, в котором имеется капиллярная трубка, не смачиваемая жидкостью. Давление пара в точке *B* (рис.90) больше давления в точке *A* на величину $\rho_n gh$:

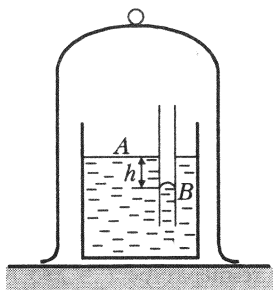


Рис. 90

$$p_B = p_A + \rho_n gh,$$

где h – разность уровней жидкости в капилляре и в сосуде, а ρ_n – плотность пара. Жидкость в капилляре находится в равновесии под действием двух сил: силы поверхностного натяжения, равной по модулю $2\pi r\sigma$ (σ – коэффициент поверхностного натяжения, r – радиус капилляра), и силы давления жидкости на глубине h , равной $\rho gh \cdot \pi r^2$ (ρ – плотность жидкости), поэтому $2\pi r\sigma = \pi r^2 \rho gh$. Отсюда

$$h = \frac{2\sigma}{\rho gr}, \text{ и } p_B = p_A + \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_n}{\rho}.$$

Таким образом, давление над поверхностью жидкости тем больше, чем меньше ее радиус кривизны. Это означает, что давление насыщенного пара над каплей тем больше, чем меньше радиус этой капли. Значит, если над поверхностью маленькой капли пар насыщен, то над поверхностью большой капли он будет ненасыщенным. Это приведет к тому, что пар будет конденсироваться на большой капле, понижая тем самым давление пара у поверхности малой капли. Это, в свою очередь, приведет к испарению маленькой капли.

В результате в сосуде через некоторое время останется только одна большая капля.

Тот же результат можно получить и из самых общих рассуждений. Предположим, что в сосуде налита жидкость (поверхность жидкости плоская) и имеется капля. При испарении жидкости с плоской поверхностью эта площадь не меняется. В то же время при испарении капли площадь поверхности жидкости уменьшается. Но, как мы знаем, всякая система, предоставленная самой себе, стремится перейти в состояние с минимальной энергией. Поэтому если в сосуде имеется капля жидкости и жидкость с плоской поверхностью, то равновесие наступит тогда, когда капля полностью испарится и сконденсируется на плоской поверхности. (Это означает, что давление насыщенных паров над каплей больше, чем над плоской поверхностью жидкости). Если в сосуде имеются капли разного размера, то мелкие капли будут испаряться и конденсироваться на более крупных, пока не останется только одна большая капля.

78. Так как вогнутая поверхность воды в капилляре находится на большей высоте, чем плоская, то давления пара у этих поверхностей разные:

$$\Delta p = \rho gh,$$

где ρ – плотность пара, h – высота поднятия жидкости в капилляре. Поэтому пар и над кюветой и в капилляре может быть насыщенным, и никакого потока пара не будет.

79. Нет. Гидроэлектростанция вырабатывает электроэнергию за счет потенциальной энергии потока воды, проходящего через ее турбины. Масса воды Δm обладает потенциальной энергией Δmgh , где h – высота плотины. Для того чтобы эта масса воды испарилась, необходимо количество теплоты $Q_1 = \Delta mc(T_1 - T_0)$ для ее нагревания от температуры $T_0 = 20^\circ\text{C}$ до температуры кипения $T_1 = 100^\circ\text{C}$ и еще количество теплоты $Q_2 = \lambda \Delta m$ для испарения воды (здесь $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К) – удельная теплоемкость воды, $\lambda = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг – удельная теплота парообразования). Мощности гидроэлектростанции в случае отсутствия потерь хватит для испарения воды, если

$$\Delta mgh = \Delta mc(T_1 - T_0) + \Delta m\lambda,$$

или если

$$h = \frac{c(T_1 - T_0) + \lambda}{g} \approx 230 \text{ км!}$$

80. При конденсации пара выделяется большое количество теплоты.

81. При нагревании воды расходуется энергия

$$W\tau_1 = cm(T_2 - T_1) + Q_1,$$

где W – мощность, τ_1 – время нагревания, $T_2 = 90^\circ\text{C}$, $T_1 = 85^\circ\text{C}$ и Q_1 – потери энергии, которые пропорциональны разности температур воды и окружающей среды и времени τ . При остывании воды выделяется количество теплоты

$$cm\Delta T = Q_2,$$

где $\Delta T = 1^\circ\text{C}$. Так как разность температур воды и воздуха меняется незначительно, а $\tau_2 = 0,5\tau_1$, то $Q_2 = 0,5Q_1$, так что

$$W\tau_1 = cm(T_2 - T_1) + 2cm\Delta T.$$

Отсюда

$$m = \frac{W\tau_1}{c(T_2 - T_1) + 2c\Delta T} \approx 1,8 \text{ кг}.$$

82. Так как мяч после удара о землю поднялся почти на ту же высоту, с которой он падал, потерями энергии при ударе можно пренебречь и считать, что сжатие воздуха в мяче во время удара происходит адиабатически.

Согласно закону сохранения энергии (первому закону термодинамики), изменение внутренней энергии газа ΔU равно

$$\Delta U = Q + A,$$

где Q – количество теплоты, сообщенное газу, а A – работа, совершенная над газом при его сжатии. Так как в данном случае $Q = 0$, то

$$\Delta U = A.$$

Как известно, изменение внутренней энергии газа не зависит от процесса и равно

$$\Delta U = c_V m \Delta T = c_V m (T_{\max} - T),$$

где c_V – удельная теплоемкость при постоянном объеме, T – начальная температура газа, m – его масса.

Работа по сжатию воздуха совершается за счет механической энергии мяча. Если пренебречь потенциальной энергией деформации камеры и грунта в момент наибольшего сжатия (когда температура воздуха максимальна, а мяч покоится), то

$$A = Mgh,$$

где M – масса мяча, h – высота, на которую он был подброшен.

Подставив выражения для ΔU и A , получим

$$c_V m (T_{\max} - T) = Mgh.$$

Массу воздуха в мяче можно определить из уравнения газового

состояния

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

где $p = p_0 + p_1$ ($p_0 = 1$ атм – атмосферное давление, p_1 – избыточное давление), V – объем мяча. Отсюда

$$m = \frac{(p_0 + p_1)VM}{RT}.$$

Тогда окончательно находим

$$T_{\max} = T \left(1 + \frac{MghR}{M(p_0 + p_1)Vc_V} \right) \approx 1,02 T = 306 \text{ К}.$$

83. Рассмотрим установившийся воздушный поток через хребет и проследим за небольшой массой m воздуха, занимающей на подветренной стороне горы (у побережья) объем V_1 . Обозначим T_1 температуру и p_1 давление воздуха на подветренной стороне. При этом p_1 можно считать полным давлением, так как $p_1 \sim 10^5$ Па, а парциальное давление паров $p_n = \varphi p_n \approx 1,8 \cdot 10^3$ Па, так что $p_n \ll p_1$. Оказавшись на наветренной стороне горы, давление на которой равно p_2 , эта же масса воздуха будет иметь объем V_2 и температуру T_2 . Изменение ΔU внутренней энергии газа происходит за счет работы A внешних сил, действующих на выделенный объем газа, и количества теплоты Q , выделяющегося при конденсации пара:

$$\Delta U = A + Q.$$

Изменение внутренней энергии воздуха пропорционально изменению температуры. Для одноатомного газа энергия одного моля газа $U = \frac{3}{2} RT$. Воздух состоит в основном из двухатомных газов – азота и кислорода. Для него $U = \frac{5}{2} RT$ и $\Delta U = \frac{5}{2} R\Delta T$, где $\Delta T = T_2 - T_1$. Масса m воздуха содержит $\nu = \frac{m}{M}$ молей, где $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса воздуха. Поэтому изменение внутренней энергии массы m воздуха равно

$$\Delta U = \frac{5}{2} \frac{m}{M} R\Delta T.$$

Работу A внешних сил можно рассчитать так. На подветренной стороне горы внешние силы – силы атмосферного давления – совершают работу, выталкивая массу m газа из объема V_1 . Эта работа равна $A_1 = p_1 V_1$. На наветренной стороне масса m воздуха вытесняет воздух, который находился ранее в объеме V_2 . Работа сил

атмосферного давления здесь отрицательна и равна $A_2 = -p_2 V_2$. Таким образом,

$$A = A_1 + A_2 = p_1 V_1 - p_2 V_2.$$

Но, согласно уравнению газового состояния,

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1, \text{ а } p_2 V_2 = \frac{m}{M} R T_2.$$

Поэтому

$$A = \frac{m}{M} R (T_1 - T_2) = -\frac{m}{M} R \Delta T.$$

А сколько выделилось тепла при конденсации пара? Если масса сконденсировавшегося пара Δm , то $Q = \Delta m r$, где $r = 2,5 \cdot 10^6$ Дж/кг – удельная теплота парообразования, а Δm можно определить из уравнения газового состояния для пара $p_{\text{п}} V_1 = \frac{\Delta m}{M_{\text{п}}} R T_1$ (где $M_{\text{п}} = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль). Подставив в эту формулу $V_1 = \frac{m}{M} \frac{R T_1}{p_1}$, получим

$$\Delta m = m \frac{M_{\text{п}}}{M} \frac{p_{\text{п}}}{p_1} = \varphi m \frac{M_{\text{п}}}{M} \frac{p_{\text{п}}}{p_1}, \text{ и } Q = \varphi r m \frac{M_{\text{п}}}{M} \frac{p_{\text{п}}}{p_1}.$$

Теперь перепишем закон сохранения энергии в виде

$$\frac{5}{2} \frac{m}{M} R \Delta T = -\frac{m}{M} R \Delta T + \varphi r m \frac{M_{\text{п}}}{M} \frac{p_{\text{п}}}{p_1},$$

откуда найдем

$$\Delta T = \frac{2}{7} \frac{\varphi r M_{\text{п}} p_{\text{п}}}{R p_1} \approx 23 \text{ К}.$$

Это означает, что температура сухого воздуха на наветренной стороне горы $T_2 \approx 48^\circ \text{C}$!

Описанные нами воздушные потоки действительно характерны для Кордильер, служащих разделом областей с разной погодой. В предгорьях Кордильер со стороны Тихого океана часты обильные дожди. По другую сторону гор часто дуют сухие горячие ветры, превратившие этот район в пустыню.

84. Когда человек выходит из воды, вода испаряется, отбирая тепло от тела.

85. Количество теплоты, передаваемое стержню, находящемуся в пламени, пропорционально площади его боковой поверхности. Теплоотвод же вдоль стержня пропорционален площади поперечного сечения стержня. Поэтому повышение температуры находится в прямой зависимости от отношения площади боковой поверхности к площади поперечного сечения. Это отношение обратно пропорцио-

нально радиусу стержня. Поэтому тепловое равновесие толстого стержня (гвоздя) наступает при значительно меньшей температуре, чем тонкого (провода).

86. Теплопроводность чугуна меньше, чем теплопроводность алюминия. Поэтому температура внутренней поверхности чугунной сковороды более однородна. Кроме того, благодаря большей теплоемкости чугунной сковороды ее температура практически не меняется, когда на нее опускают холодные продукты, и продукты при жарке не подгорают.

87. Когда мы прикасаемся к деревянным предметам, имеющим плохую теплопроводность, нагревается только небольшой участок предмета под пальцем. Металл же, обладающий хорошей теплопроводностью, нагревается весь. Это приводит к большему теплоотводу от пальца и его охлаждению.

88. При измерении температуры термометр должен нагреться от комнатной температуры до температуры тела, т.е. на $15-17^\circ\text{C}$. «Стряхнуть» же термометр можно уже тогда, когда его температура понизится на $2-3^\circ\text{C}$, так как шкала термометра начинается с 34°C . Необходимо учесть еще то, что при нагревании и остывании тел скорость изменения их температуры пропорциональна разности температур тела и среды, и поэтому зависимость температуры термометра от времени имеет вид, изображенный на рисунке 91. Это приводит к тому, что время остывания термометра до температуры, при которой его можно «стряхнуть», намного меньше времени измерения температуры.

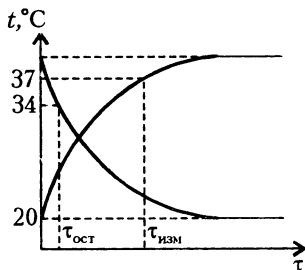


Рис. 91

89. Корабль нагревается до такой температуры T , при которой энергия, излучаемая им, становится равной энергии, получаемой от Солнца. Излучаемая в единицу времени энергия пропорциональна площади поверхности корабля. Будем для оценки считать, что корабль – шарик, радиус которого равен r . Тогда энергия, излучаемая кораблем, нагретым до температуры T , за единицу времени, равна

$$W_{\text{изл}} = 4\pi r^2 \sigma T^4.$$

Энергия, получаемая от Солнца за единицу времени, пропорциональна площади наибольшего сечения шарика, т.е. πr^2 , и равна

$$W_{\text{полг}} = \pi r^2 E_1,$$

где E_1 – плотность потока солнечного излучения на расстоянии R от Солнца. Так как в единице телесного угла от Солнца распространя-

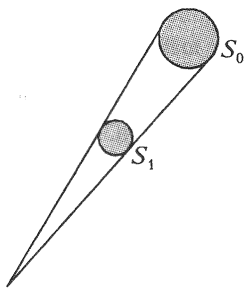


Рис. 92

ется постоянная энергия, то для корабля и Земли, обозначив R_0 расстояние от Земли до Солнца и E_0 – плотность потока солнечного излучения на орбите Земли, можно записать (рис.92)

$$E_1 S_1 = E_0 S_0, \text{ и } E_1 = E_0 \frac{S_0}{S_1} = E_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2.$$

Следовательно,

$$W_{\text{полг}} = \pi r^2 E_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2.$$

Приравняем $W_{\text{изл}}$ и $W_{\text{полг}}$:

$$4\pi r^2 \sigma T^4 = \pi r^2 E_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2.$$

Из этого уравнения, приняв температуру T равной температуре плавления железа, найдем

$$R = \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{E_0}{\sigma T^4}} \approx 5 \cdot 10^6 \text{ км.}$$

Итак, при приближении к Солнцу корабль может расплавиться. А при удалении от Солнца? Сколько нужно энергии для того, чтобы согреть космический корабль, направляющийся от Солнца, когда его излучение станет незначительным? Следует, конечно, учесть, что на корабле должен быть мощный реактор (скажем, ядерный), который снабжал бы энергией двигатель, приборы и т.д. Пусть мощность реактора 10^{10} Вт (всего вдвое больше мощности ракеты-носителя спутника «Протон»), а его КПД $\eta = 40\%$. КПД любой тепловой машины не может быть больше чем $(T_1 - T_2)/T_1$, где T_1 – температура в горячей зоне, а T_2 – в холодной. Для того чтобы повысить КПД, T_1 желательно сделать как можно выше. Но T_1 ограничена тугоплавкостью материалов. Пусть $T_1 = 3500$ К (на 150 К ниже температуры плавления вольфрама). Тогда $T_2 = (1 - \eta)T_1 = 2100$ К. При таком КПД реактора 60% его мощности, т.е. $6 \cdot 10^9$ Вт, выделяется в виде тепла. Это огромная мощность, и вопрос уже нужно ставить не о том, чтобы согреть корабль, а о том, как отвести такую мощность. Единственная возможность – излучение. Но мощность излучения равна $W_{\text{изл}} = \sigma T_2^4 S$. Поэтому, для того чтобы избавиться от такой мощности, корабль должен иметь площадь

$$S \approx 5 \cdot 10^3 \text{ м}^2.$$

Это полгектара площади с температурой 2100 К!

Нужно отметить, что с проблемой теплоотвода уже встречаются конструкторы нынешних космических кораблей и даже скафандров.

90. При повышении давления температура плавления льда действительно понижается. Однако при плавлении льда поглощается тепло, и температура льда под проволокой начинает падать. Это происходит до тех пор, пока температура льда в области повышенного давления не упадет до температуры плавления при этом давлении. Дальнейшее плавление льда будет определяться теплом, которое вследствие теплопроводности будет приходить к области пониженной температуры. При использовании проволоки это тепло будет проводиться, за счет хорошей теплопроводности металла, от замерзающей сверху воды, и процесс разрезания льда будет быстрым. При использовании капроновой нити, обладающей малой теплопроводностью, тепло будет подводиться главным образом за счет охлаждения всего бруска льда в целом, и процесс разрезания пойдет очень медленно.

91. Обозначим H максимальную высоту ледника. Она ограничена из-за плавления льда у основания ледника. При плавлении льда массой $\Delta m = \rho S \Delta x$ (ρ – плотность льда, S – площадь сечения ледника) поглощается энергия $\lambda \Delta m$. Эта энергия равна изменению потенциальной энергии ледника, высота которого уменьшается на Δx :

$$\rho g H S \Delta x \approx \rho S \lambda \Delta x,$$

откуда

$$H \approx \frac{\lambda}{g}.$$

Для льда $\lambda = 332$ кДж/кг. Поэтому

$$H \approx 35 \text{ км}.$$

Примерно такую же величину мы получим для высоты гор, так как удельная теплота плавления горных пород того же порядка, что и у льда. Как известно, самая высокая гора на Земле имеет высоту ≈ 9 км, так что наша оценка совсем не плоха.

92. При взрыве давление газа в цилиндре возрастает скачком. Из-за инерции поршня и шатуна они не могут быстро набрать скорость и поэтому сильно деформируются. На это уходит часть энергии. При правильной регулировке двигателя смесь сгорает сравнительно медленно, и давление в цилиндре все время примерно одно и то же.

Кроме того, при взрыве газа его температура больше температуры смеси при медленном сгорании. Поэтому возрастают потери энергии из-за теплоотдачи.

93. КПД теплового двигателя равен

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Если при сгорании топлива выделилась энергия q , то двигатель совершил работу

$$A = q\eta_1 = q \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

При этом отопительной системе было передано количество теплоты

$$Q_1 = (1 - \eta)q = \frac{T_2}{T_1} q.$$

Холодильная машина работает по обратному циклу. Она отбирает у грунтовых вод количество теплоты q_1 и передает отопительной системе количество теплоты

$$Q_2 = A + q_1,$$

где A – работа, совершенная над холодильной машиной. Так как машина идеальна, то она обратима. Это означает, что при работе по прямому циклу она совершает работу A , получая от нагревателя количество теплоты Q_1 и отдавая грунтовым водам количество теплоты q_1 . Ее КПД

$$\eta_2 = \frac{A}{Q_2} = \frac{T_2 - T_3}{T_2},$$

откуда

$$Q_2 = A \frac{T_2}{T_2 - T_3} = q \frac{(T_1 - T_2)T_2}{T_1(T_2 - T_3)}.$$

Всего отопительная система получает количество теплоты

$$Q = Q_1 + Q_2 = q \frac{T_2}{T_1} \frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_3} \approx 2q.$$

Таким образом, КПД системы

$$\eta = \frac{Q}{q} \approx 2.$$

КПД больше 1! Это, впрочем, не противоречит законам термодинамики. Ведь мы извлекаем тепло из постороннего источника – грунтовых вод.

94. Брезентовую ткань можно представить себе как сито с очень маленькими ячейками. Сквозь такое сито капли воды не протекают, так как их удерживает сила поверхностного натяжения (рис.93).

Эти капли будут срываться, если толщина h слоя воды такова, что $\rho gh > \frac{2\sigma}{(a/2)}$, т.е. $h > \frac{4\sigma}{\rho ga}$.

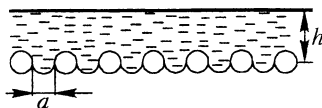


Рис. 93

Если прикоснуться к мокрой ткани рукой, то несколько капель сливаются в одну – значительно большего радиуса. Эта капля уже не удерживается капиллярными силами (сила поверхностного натяжения, удерживающая каплю, при увеличении радиуса капли растет пропорционально радиусу, а масса капли – пропорциональна кубу радиуса капли, т.е. значительно быстрее). Потолок палатки начинает протекать.

95. При решении этой задачи будем исходить из того, что после слияния двух мыльных пузырей в один суммарная масса воздуха в них не изменяется:

$$m_3 = m_1 + m_2.$$

Согласно уравнению газового состояния, масса воздуха в пузыре равна

$$m = \frac{pVM}{RT}, \quad (2)$$

где $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ – объем пузыря, M – молярная масса воздуха, T – температура (она равна температуре окружающего воздуха и одинакова для всех пузырей) и R – универсальная газовая постоянная.

Запишем условие равновесия пузыря:

$$p = p_0 + \Delta p = p_0 + \frac{2\sigma}{r},$$

где $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$ – добавочное давление под сферической поверхностью мыльной пленки радиусом r , а p_0 – атмосферное давление.

Теперь можно записать:

$$m_1 = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{r_1}\right) \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^3 \frac{M}{RT}, \quad m_2 = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{r_2}\right) \cdot \frac{4}{3}\pi r_2^3 \frac{M}{RT},$$

$$m_3 = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{r_3}\right) \cdot \frac{4}{3}\pi r_3^3 \frac{M}{RT},$$

откуда, учитывая связь между массами, и найдем p_0 :

$$p_0 = \frac{2\sigma(r_3^2 - r_1^2 - r_2^2)}{r_1^3 + r_2^3 + r_3^3}.$$

96. Свободная поверхность жидкости у торца сложенных стекол представляет собой цилиндрическую поверхность. Будем считать, что смачивание полное. Тогда радиус r этой поверхности равен $d/2$, где d – расстояние между стеклами. Давление под изогнутой поверхностью жидкости меньше атмосферного на величину Δp , которую можно найти, рассмотрев равновесие элемента жидкости и воздуха. Учитывая силы поверхностного натяжения на границе стекло – жидкость, запишем

$$\Delta p dl = 2\sigma l,$$

откуда

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{d} = \frac{\sigma}{r}.$$

Поскольку атмосферное давление больше, чем давление между пластинками, то оно прижимает пластинки друг к другу. Так как стекла обычно неровные, то они касаются друг друга в некоторых местах, что ограничивает сближение стекол. Для того чтобы оторвать одно стекло от другого, нужно приложить силы, большие чем $\Delta p S$, где S – площадь стекол. Если расстояние между стеклами $d \sim 10^{-6}$ м, то

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{d} \approx 1,4 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

При площади пластины $\sim 10^{-2} \text{ м}^2$ сила должна быть порядка $1,4 \cdot 10^3 \text{ Н}$!

97. Рассмотрим взаимодействие чистых концов спичек. В этом случае поверхность воды принимает вид, изображенный на рисунке 94,а. На высоте h справа от левой спички давление воды равно $p_0 - \rho gh$, а слева давление воздуха равно атмосферному p_0 . Поэтому сила, действующая на левую спичку со стороны жидкости, будет меньше силы, действующей со стороны воздуха, и спички

будут притягиваться. Когда концы обеих спичек покрыты парафином, то поверхность воды здесь принимает вид, изображенный на рисунке 94,б, и рассмотрение, аналогичное приведенному выше, дает тот же результат. Поверхность воды между спичками в случае «разноименных» концов изображена на рисунке 94,в. Рассмотрев силы, действующие на концы спичек слева и справа, мы приходим к выводу, что спички отталкиваются.

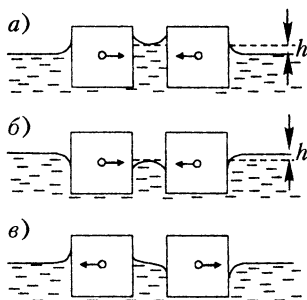


Рис. 94

98. Будем обозначать через l высоту поднятия жидкости в капилляре: $l = \frac{2\sigma}{\rho g r}$. Чтобы вода могла подняться по трубке, l должно быть больше h ($h = 28,5$ мм), а для того чтобы она начала вытекать через нижний конец, H ($H = 30,5$ мм) должно быть больше l . Тогда получаем, что жидкость будет вытекать, если $\frac{\rho g r h}{2} < \sigma < \frac{\rho g r H}{2}$. Подставляя данные, получим $0,070$ Н/м $< \sigma < 0,075$ Н/м. Отсюда находим диапазон температур: $7^\circ\text{C} < t < 40^\circ\text{C}$.

99. В точке, в которой сходятся поверхности трех сред (в нашем случае жидкости, твердого тела и газа), эти поверхности образуют угол, который называют краевым углом. Краевой угол определяется силами взаимодействия между молекулами в этих средах, и его можно определить из условия равновесия. Ограничимся случаем, когда одна из поверхностей – плоская поверхность твердого тела (рис.95). Рассмотрим отрезок границы длиной l . В точке O сходятся три силы поверхностного натяжения, направленные по касательным к границам раздела сред: $F_1 = l\sigma_{12}$, $F_2 = l\sigma_{23}$ и $F_3 = l\sigma_{31}$, где σ_{12} – поверхностное натяжение на границе сред 2 и 1, σ_{23} – поверхностное натяжение на границе сред 2 и 3, а σ_{31} – на границе сред 1 и 3. Сумма проекций этих сил на плоскую поверхность должна быть равна нулю:

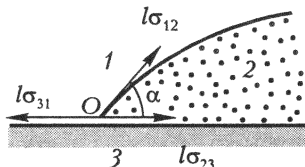


Рис. 95

$$l\sigma_{31} - l\sigma_{23} - l\sigma_{12} \cos \alpha = 0.$$

Отсюда

$$\cos \alpha = \frac{\sigma_{31} - \sigma_{23}}{\sigma_{12}}.$$

Если $\sigma_{31} > \sigma_{12} + \sigma_{23}$, то равновесие невозможно. В этом случае жидкость растекается по поверхности, т.е., как говорят, полностью смачивает твердое тело. При $\sigma_{23} > \sigma_{31} + \sigma_{12}$ равновесие тоже невозможно. Тогда жидкость полностью не смачивает твердое тело и собирается в каплю. В обычных школьных задачах считается, что $\cos \alpha = 1$ или $\cos \alpha = -1$.

Краевой угол не зависит от силы тяжести и должен быть одним и тем же в невесомости и на Земле. Как видно из рисунка 96, а и б,

$$\cos \alpha = \frac{R_1}{R_0} \text{ и } \cos \alpha = \frac{h}{R_2}.$$

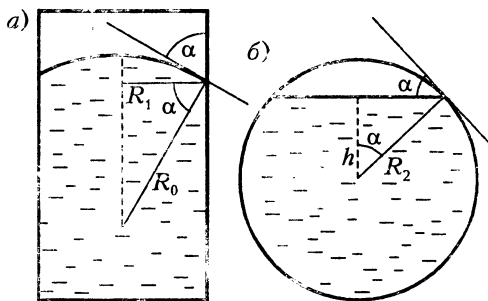


Рис. 96

Отсюда

$$h = \frac{R_1 R_2}{R_0}$$

Если ту же жидкость налить в сосуд с радиусом, большим R_2 , то h уменьшится, а жидкость у края слегка опустится, образуя тот же угол α со стенкой. При $R < R_2$ жидкость у края приподнимется, чтобы краевой угол опять сохранился.

Краевой угол, как мы уже выяснили, определяется только взаимодействием молекул трех сред. Его можно изменить, добавив в одну из сред какое-нибудь вещество, влияющее на поверхностное натяжение. Именно с этим связано то, что при растворении даже незначительного количества мыла или стирального порошка в воде ее моющее действие значительно усиливается. Это свойство объясняется тем, что мыло скапливаясь (адсорбируясь) на границе воды с отмываемой поверхностью или тканью, значительно уменьшает поверхностное натяжение. В результате ослабляется прилипание частичек жира и грязи к поверхности.

Пусть, например, на поверхности ткани имеется капелька жира, который смачивает ее (рис.97). Краевой угол α определяется, как нам уже известно, поверхностными натяжениями на границах

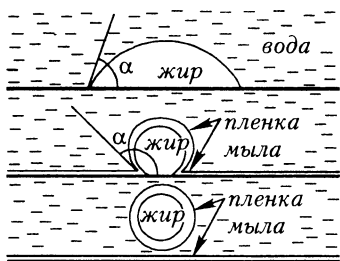


Рис. 97

раздела. Если в воду добавить мыло, то молекулы мыла, адсорбируясь на границах вода – жир и вода – ткань, значительно уменьшают $\sigma_{в-ж}$ и $\sigma_{в-т}$. Натяжение $\sigma_{в-т}$ оказывается меньшим, чем $\sigma_{ж-т}$, и соответственно, $\cos \alpha < 0$, т.е. $\alpha > 90^\circ$. Жидкость перестанет смачивать поверхность. Уменьшение коэффициента $\sigma_{в-ж}$ при этом, как легко видеть, также увеличивает краевой угол. При краевом

угле $\alpha = 180^\circ$ жир абсолютно не смачивает поверхность, и капелька жира сама отрывается от нее. Если же уменьшение поверхностного натяжения не столь велико, то во всяком случае после увеличения краевого угла α капли легко отрываются от поверхности при механических воздействиях во время мойки или стирки.

На рисунке 98 показана серия увеличенных фотографий шерстяной нити. На первой фотографии — нить, испачканная жидким парафином. Три следующие фотографии показывают очищающее действие раствора стирального порошка. Ясно видно, как увеличивается краевой угол поверхности парафина с нитью. Парафиновый жир сворачивается в глобулы и уносится водой. Последняя фотография показывает уже совсем чистую нить.

Адсорбированные молекулы мыла окружают капельки жира и отмываемую поверхность плотно заполненным (мономолекулярным) слоем, который обладает высокой механической прочностью. Молекулы мыла сильно связаны друг с другом, и разорвать пленку очень трудно. Поэтому при стирке пленки из адсорбированных молекул не разрушаются и препятствуют обратному прилипанию уже оторвавшихся капелек жира к поверхности и слиянию капелек друг с другом. Оторвавшиеся при стирке твердые частички грязи также оказываются окруженными молекулами мыла, которые препятствуют их обратному прилипанию к поверхности. Взвешенные в воде частицы грязи и капельки жира удаляются вместе с ней.

Интересно, что образование устойчивой пены — это только побочный эффект уменьшения поверхностного натяжения при растворении моющих веществ. Пена образуется из пузырьков воздуха, которые попадают в воду, увлекаемые струей воды. Эти пузырьки всплывают к поверхности и оказываются окруженными пленкой. Если поверхностное натяжение мало, то мало и избыточное давление $2\sigma/r$ в пузырьке, и он долго не лопается.

Механизм моющего действия, который мы здесь разобрали, представляет интерес и в связи с другими важными техническими

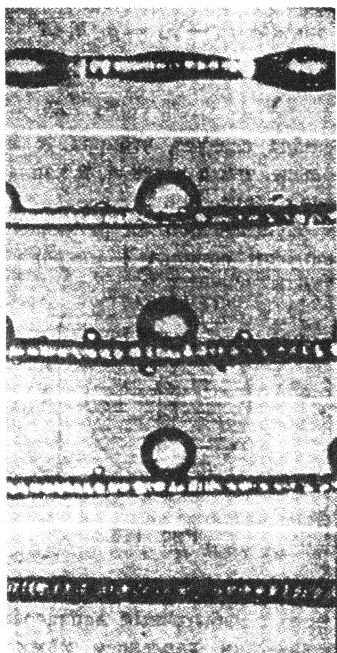


Рис. 98

задачами: покрытием поверхностей лаками и красками, склеиванием, пропиткой некоторых материалов другими (например, пропиткой порошков искусственных алмазов металлом, при которой образуется сверхпрочный материал алмет) и т.д.

100. Прежде всего поговорим о форме капли в невесомости. Такая капля должна быть сферической благодаря силам поверхностного натяжения, из-за которых капля должна принять форму с минимальной поверхностью. Когда капля падает равномерно, на ее форму влияет гидростатическое давление внутри капли. При равномерном падении капли сила тяжести, действующая на столбик AB

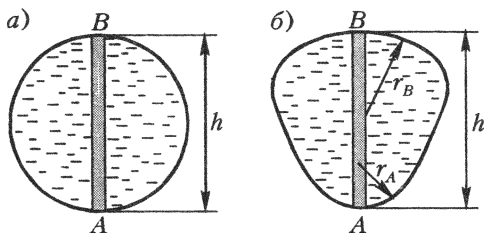


Рис. 99

(рис.99,а), должна быть уравновешена силами гидростатического давления снизу и сверху столбика. Если высота столбика AB равна h , а площадь столбика s , то

$$\rho(sh)g = s(p_A - p_B), \text{ или } p_A - p_B = \rho gh.$$

Мы видим, что гидростатическое давление в капле меняется с высотой. Предположим, что давление воздуха со всех сторон капли одинаково и равно p_0 . Разность давлений внутри и снаружи капли определяется формулой Лапласа $\Delta p = 2\sigma/r$, где r — радиус кривизны и σ — коэффициент поверхностного натяжения капли. Поэтому давление внутри капли равно $p_0 + \frac{2\sigma}{r}$. Для точек A и B имеем

$$p_A = p_0 + \frac{2\sigma}{r_A} \text{ и } p_B = p_0 + \frac{2\sigma}{r_B},$$

а так как $p_A - p_B = \rho gh$, то

$$\frac{2\sigma}{r_A} - \frac{2\sigma}{r_B} = \rho gh.$$

Отсюда следует, что радиус кривизны в точке B должен быть больше, чем в точке A , капля должна выглядеть так, как показано на рисунке 99,б.

Существенно ли различие между r_A и r_B ? Для маленьких

капель радиусом порядка 1 микрона (10^{-6} м) $\rho gh \approx 2 \cdot 10^{-2}$ Н/м², а $2\sigma/r \approx 1,6 \cdot 10^5$ Н/м²! В этом случае ρgh настолько мало по сравнению с избыточным лапласовым давлением в капле, что гидростатическим давлением можно пренебречь. Такая капля может считаться эталоном сферичности. Иное дело для капли диаметром, скажем, 4 мм. Для нее $\rho gh \approx 60$ Н/м², а $2\sigma/r \approx 78$ Н/м². Эти величины одного порядка, и нарушения сферичности для такой капли более существенны. Полагая $r_A r_B \approx r_{\text{ср}}^2$ и $h = 2r_{\text{ср}} \approx 4$ мм, найдем, что $\Delta r = r_B - r_A \approx 0,06$ мм. Разность радиусов составляет 3% от радиуса.

Однако наш расчет показывает только, для каких капель можно ожидать нарушения сферичности, но не объясняет форму капли. В чем же дело? А в том, что мы не учли разности давлений воздуха под каплей и над ней. Перед каплей давление больше нормального атмосферного на величину порядка $\rho_{\text{возд}} v^2$, где v — скорость капли. За каплей же давление оказывается меньше атмосферного из-за того, что там образуются вихри и турбулентный воздушный поток. Если разность давлений воздуха у «дна» и «вершины» капли $p_{A0} - p_{B0} > \rho gh$, то $\frac{2\sigma}{r_A} - \frac{2\sigma}{r_B} = \rho gh - (p_{A0} - p_{B0}) < 0$ и, следовательно, $r_A > r_B$. Об этом и свидетельствуют снимки.

Итак, теперь понятно, почему маленькие водяные капли сферичны, а капли диаметром порядка 1—5 мм похожи на сдобную булочку. А как должны выглядеть капли еще большего диаметра? Оказывается, что капли большего диаметра неустойчивы и разрываются на маленькие. Это, впрочем, и понятно. Сохранность капли, ее форму обеспечивает поверхностное натяжение. Однако когда гидростатическое давление в капле начинает превышать давление Лапласа, капля «растекается» и дробится на более мелкие. Этим объясняется, почему не бывает крупных капель на листьях деревьев и других поверхностях, не смачиваемых жидкостью. Возможный размер капли можно получить из неравенства $2\sigma/r > \rho gh$, полагая, что $h \approx 2r$:

$$r < \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}}.$$

Для воды, например, $r < 3,8$ мм, для ртути $r < 2,6$ мм. В случае движущейся капли все выглядит сложнее из-за внутренних вихревых движений внутри капли, которые появляются благодаря силам трения, действующим со стороны воздуха. Это, однако, мало меняет нашу оценку.

101. Заряд Q , который нужно поместить в нижней точке сферы, должен быть таким, чтобы электрическая сила, действующая на верхний заряд, была не меньше силы тяжести mg , т.е. $k \frac{qQ}{d^2} \geq mg$.

Отсюда

$$Q \geq \frac{mgd^2}{kq}.$$

Однако нам нужно еще проверить, будет ли равновесие шарика устойчивым.

Рассмотрим малое отклонение шарика от положения равновесия (рис. 100). Равновесие шарика устойчиво, если проекция силы \vec{F} электрического взаимодействия зарядов на касательную к сфере больше или равна проекции силы тяжести на ту же касательную (сила реакции \vec{N} перпендикулярна поверхности сферы):

$$k \frac{qQ}{d^2} \sin \alpha \geq mg \sin 2\alpha.$$

Рис. 100

Так как угол α отклонения шарика от положения равновесия мал, то $\sin \alpha \approx \alpha$, $\sin 2\alpha \approx 2\alpha$. Поэтому

$$2mg \leq k \frac{qQ}{d^2}.$$

Следовательно, для устойчивого равновесия шарика в верхней точке сферы в нижнюю точку сферы должен быть помещен заряд

$$Q \geq 2 \frac{mgd^2}{kq}.$$

102. Как известно, напряженность электрического поля внутри заряженного тонкого сферического слоя равна нулю, а вне этого слоя напряженность такая, какой она была бы, если бы весь заряд слоя был сосредоточен в его центре. (Это можно показать, исходя из закона Кулона и принципа суперпозиции.)

Разобьем Землю и атмосферу Земли на тонкие сферические слои. Тогда ясно, что на поверхности Земли напряженность электрического поля равна

$$E_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2},$$

где Q – суммарный заряд Земли, R – радиус Земли. На высоте h

напряженность электрического поля складывается из напряженности поля, созданного зарядом Q Земли, и напряженности поля, созданного зарядом q слоев атмосферы с радиусами, меньшими $R + h$, т.е.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q + q}{(R + h)^2}.$$

Так как

$$q = \rho V = \frac{4}{3} \pi \left((R + h)^3 - R^3 \right) \rho,$$

то

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R + h)^2} + \frac{1}{3\epsilon_0} \left((R + h) - \frac{R^3}{(R + h)^2} \right) \rho.$$

Радиус Земли R много больше высоты h , поэтому в знаменателе сумму $R + h$ можно заменить на R . Тогда

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R + h)^2} + \frac{h}{3\epsilon_0} \rho = E_0 + \frac{h}{3\epsilon_0} \rho.$$

Отсюда

$$\rho = \frac{3\epsilon_0(E - E_0)}{h} \approx -1,3 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^3.$$

103. Если разность потенциалов между электродами U , то напряженность электрического поля между ними $E = U/d$. В этом поле на электрон действует сила $\vec{F} = e\vec{E}$ (e — заряд электрона), сообщающая ему ускорение

$$a = \frac{F}{m} = \frac{Ee}{m} = \frac{Ue}{md}.$$

При столкновении с атомом газа электрон передает ему свою энергию и останавливается (мы считаем, что столкновение неупругое). Масса атома много больше массы электрона. Поэтому атому газа при столкновении передается энергия $\frac{mv^2}{2}$, приобретаемая электроном между его последовательными столкновениями. Эта энергия должна быть равна энергии ионизации газа W :

$$\frac{mv^2}{2} = W.$$

Найдем теперь скорость, приобретаемую электроном. Если время

разгона равно τ , то мы можем записать, что $v = a\tau = \frac{Ue\tau}{md}$ и $l = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{Ue\tau^2}{2md}$. Из этих уравнений

$$v = \sqrt{\frac{2Uel}{md}}.$$

Подставляя это выражение для v в уравнение для энергии, получим

$$\frac{Uel}{d} = W,$$

откуда

$$U = \frac{Wd}{el} \approx 160 \text{ В}.$$

104. Потенциал шара должен быть равен нулю. Потенциал поля в центре шара, равный, конечно, потенциалу шара, складывается из потенциала поля точечного заряда q и поля, создаваемого зарядом Q шара. Заряд Q распределен по шару неравномерно, но если шар разбить на маленькие участки с зарядами Δq , то потенциал поля, создаваемого зарядом шара в центре, можно выразить как суммарный потенциал полей точечных зарядов Δq . Таким образом, можно записать для центра шара

$$\Delta\varphi = \sum k \frac{\Delta q}{r} = \frac{k}{r} \sum \Delta q = \frac{k}{r} Q \text{ и } k \frac{Q}{r} + k \frac{q}{l} = 0.$$

Отсюда

$$Q = -\frac{r}{l} q.$$

105. Шар с полостью можно получить, если на шар, положительно заряженный по всему объему с плотностью ρ , наложить шар в форме полости, равномерно заряженный по всему объему с плотностью $-\rho$. Тогда искомое поле \vec{E} в произвольной точке A внутри полости равно суперпозиции поля \vec{E}_1 , создаваемого положительно заряженным шаром, и поля \vec{E}_2 , создаваемого отрицательно заряженным шаром:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Поэтому вначале нам надо решить вспомогательную задачу: найти напряженность поля внутри равномерно заряженного шара на расстоянии r от его центра.

Разобьем равномерно заряженный шар на тонкие сферические слои, толщина которых много меньше радиуса шара. Согласно

принципу суперпозиции, напряженность поля на расстоянии r от центра шара равна сумме напряженностей полей зарядов таких сферических слоев. Но напряженность поля, созданного зарядами тех слоев, радиусы которых больше r , равна нулю, а слоев, радиусы которых меньше r , — такая, как если бы заряды этих слоев находились в центре шара. Следовательно, напряженность поля на

расстоянии r от центра шара равна $E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Подставляя $Q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$, получим $E_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$.

Вернемся к нашей задаче. Обозначим расстояния от произвольной точки A до центров шаров $r_1 = O_1A$ и $r_2 = O_2A$ (рис.101). Поскольку $\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_1}{r_2}$, треугольник, составленный из векторов \vec{E}_1 , $-\vec{E}_2$ и \vec{E} , подобен треугольнику AO_1O_2 . Значит, вектор \vec{E} параллелен отрезку O_1O_2 , а его модуль определяется соотношением

$$\frac{E}{a} = \frac{E_1}{r_1} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}, \text{ т.е. } E = \frac{\rho a}{3\epsilon_0}.$$

Электрическое поле внутри полости однородно.

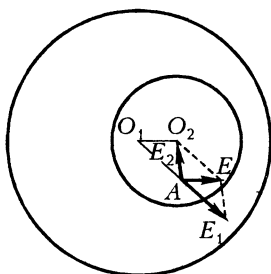


Рис.101

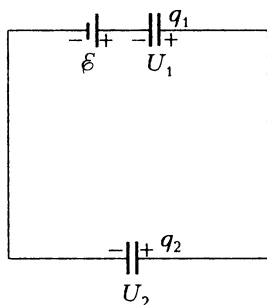


Рис.102

106. Зарядив оба конденсатора от источника до разности потенциалов ϵ , составим цепь, изображенную на рисунке 102. При этом заряды на конденсаторах перераспределяются. Обозначая заряды на конденсаторах после перераспределения q_1 и q_2 , а напряжения U_1 и U_2 , имеем

$$\epsilon + U_1 - U_2 = 0,$$

$$q_1 + q_2 = 2C\epsilon, \text{ т.е. } CU_1 + CU_2 = 2C\epsilon,$$

откуда

$$U_1 = \frac{\varepsilon}{2}, \quad U_2 = \frac{3}{2}\varepsilon.$$

Зарядив затем конденсатор 1 до разности потенциалов ε , соберем ту же схему. Теперь U_2 станет равным $\frac{7}{4}\varepsilon$. Повторяя эту операцию много раз, можно зарядить конденсатор 2 до разности потенциалов, сколь угодно близкой к 2ε . Соединив теперь последовательно источник, конденсатор 1, заряженный до напряжения ε , и конденсатор 2, можно получить на концах цепи напряжение, сколь угодно близкое к 4ε .

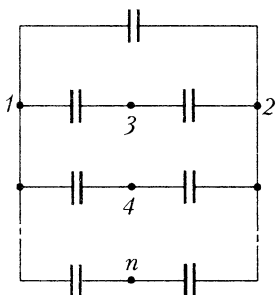


Рис. 103

107. Из симметрии очевидно, что при измерении емкости цепочки между точками 1 и 2 разность потенциалов между двумя любыми из других точек (3, 4, 5, 6...) равна нулю. Это означает, что включенные между этими точками конденсаторы не заряжены и поэтому не дают вклада в емкость системы. Тогда данная цепочка эквивалентна схеме, приведенной на рисунке 103.

Емкость такой цепи равна $\frac{1}{2}nC$.

108. Во внешнем электрическом поле все гантели ориентируются вдоль поля (рис.104, слева), при этом на шаре возникают заряды, распределенные определенным образом по его поверхности.

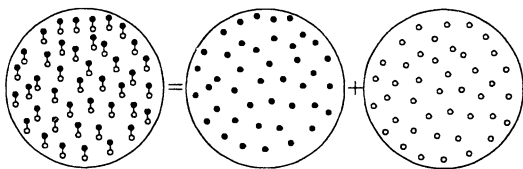


Рис. 104

Внутри шара, где плотности положительных и отрицательных зарядов одинаковы, заряды компенсируют друг друга. Если внимательно посмотреть на рисунок, то можно представить себе, что шар из полностью поляризованного диэлектрика эквивалентен двум как бы вложенным друг в друга шарам. Один шар заряжен только положительно, другой – только отрицательно. Центры этих шаров смещены друг относительно друга на расстояние l (длина гантельки), а объемная плотность заряда каждого шара равна $\rho = qn$. Рассуждая так же, как в задаче 105, придем к выводу, что поле, создаваемое этими шарами в области их пересечения, однородно

(рис.105) и равно

$$E_{\text{ш}} = \frac{\rho l}{3\epsilon_0} = \frac{qnl}{3\epsilon_0}.$$

Значит, полное поле внутри поляризованного шара также однородно, а его напряженность равна

$$E = E_0 - E_{\text{ш}} = E_0 - \frac{qnl}{3\epsilon_0}.$$

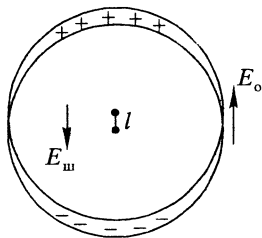


Рис. 105

109. Найдём напряженность поля отрезка Δx такого, что прямая, проведенная из него в точку C , образует угол α с нормалью к отрезку AB и $\Delta x \ll r$ (рис.106,а):

$\Delta E = k \frac{\sigma \Delta x}{r^2}$, где σ – линейная плотность заряда. Если отрезок Δx

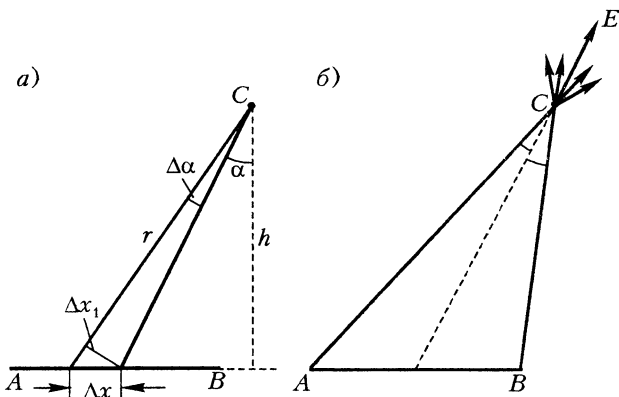


Рис. 106

виден из точки C под углом $\Delta\alpha$, то $\Delta x_1 = r\Delta\alpha$ (угол мал, так что $\operatorname{tg} \frac{\Delta\alpha}{2} \approx \frac{\Delta\alpha}{2}$, $\Delta x_1 = 2r \operatorname{tg} \frac{\Delta\alpha}{2}$). Тогда

$$\Delta x = \frac{\Delta x_1}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{r\Delta\alpha}{\cos\alpha}, \text{ и } \Delta E = k \frac{\sigma r \Delta\alpha}{r^2 \cos\alpha} = k \frac{\sigma \Delta\alpha}{r \cos\alpha} = k \frac{\sigma \Delta\alpha}{h}.$$

Напряженность поля отрезка, который виден из точки C под углом $\Delta\alpha$, не зависит от угла α . Все отрезки, которые видны из точки C под одинаковыми малыми углами, создают в ней напряженности одинаковой величины. Если мы разобьём угол ACB на большое число N одинаковых углов, то получим N одинаковых векторов,

следующих друг за другом через равные углы. Из соображений симметрии ясно, что сумма этих векторов \vec{E} направлена по биссектрисе угла ACB (рис. 106, б).

110. Так как пластины конденсатора большие, индуцированные на них заряды не изменяются при перемещении заряда q параллельно плоскостям пластин (краевыми эффектами мы пренебрегаем). Это означает, что не изменятся заряды пластин и в том случае, если заряд q равномерно «размазать» по плоскости, параллельной пластинам конденсатора и находящейся первоначально на расстоянии $d/3$ от левой пластины.

Обозначим q_1 заряд левой пластины конденсатора. Тогда заряд правой пластины (согласно закону сохранения заряда) равен $-q_1$. Заряды q_1 и $-q_1$ пластин конденсатора создают между пластинами электростатическое поле напряженностью $E_1 = \frac{q}{\epsilon_0 S}$ (S — площадь каждой пластины), а находящаяся внутри конденсатора пластина с зарядом q создает поле напряженностью $E = \frac{q}{2\epsilon_0 S}$. С одной стороны от пластины направления напряженностей обоих полей совпадают, а с другой стороны — противоположны друг другу. Поэтому разность потенциалов $\Delta\phi$ между пластинами конденсатора равна

$$\Delta\phi = (E_1 - E) \cdot \frac{1}{3}d + (E_1 + E_2) \cdot \frac{2}{3}d.$$

Так как пластины конденсатора замкнуты, напряжение между ними равно нулю: $\Delta\phi = 0$. Следовательно,

$$\frac{1}{3\epsilon_0 S} \left(q_1 - \frac{q}{2} \right) + \frac{2}{3\epsilon_0 S} \left(q_1 + \frac{q}{2} \right) = 0.$$

Из этого уравнения найдем заряд q_1 :

$$q_1 = -\frac{1}{6}q.$$

Аналогично можно найти заряд q'_1 левой пластины конденсатора, когда средняя пластина (заряд q) находится от нее на расстоянии $\frac{2}{3}d$:

$$q'_1 = \frac{1}{6}q.$$

Таким образом, при перемещении внутри конденсатора точечного заряда q (или заряженной пластины) по проводнику, соединяюще-

му пластины конденсатора, проходит заряд

$$\Delta q = q'_1 - q_1 = \frac{1}{3} q.$$

111. Когда язычок подключен к источнику, конденсатор заряжается до некоторого напряжения U . При этом на его обкладках появляются заряды $q = CU$. При переключении язычка происходит разрядка конденсатора. Таким образом, через плечо мостика, в которое включен конденсатор, течет средний ток $I = CU\nu$ при напряжении на нем U . Следовательно, эффективное сопротивление этого плеча равно $R_3 = (C\nu)^{-1}$. Записав условие баланса моста $\frac{R_1}{R} = \frac{R_3}{R_2}$, найдем

$$C = \frac{R}{R_1 R_2} \frac{1}{\nu}.$$

Полученный ответ можно считать точным только в том случае, если время зарядки конденсатора (CR_1) мало по сравнению с периодом колебаний язычка переключателя.

112. Включим гальванометр в цепь вместо неизвестного сопротивления (рис. 107), а точки A и B соединим через ключ K . Подбором переменного сопротивления R добьемся такого положения, что показания гальванометра не будут изменяться при замыкании и размыкании ключа K . В такой ситуации потенциалы точек A и B равны: $\varphi_A = \varphi_B$. Но $\varphi_A = \varphi_D - I_1 R$ (I_1 — ток, текущий по участку DA), а $\varphi_B = \varphi_D - I_2 R_2$ (I_2 — ток, текущий по участку DB). Поэтому

$$\varphi_D - I_1 R = \varphi_D - I_2 R_2,$$

откуда

$$I_1 R = I_2 R_2.$$

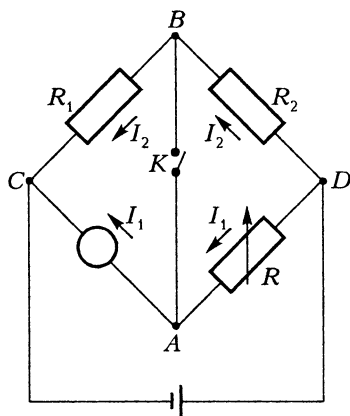


Рис. 107

С другой стороны, $\varphi_A = \varphi_C + I_1 r$

(r — сопротивление гальванометра), а $\varphi_B = \varphi_C + I_2 R_1$, так что

$$\varphi_C + I_1 r = \varphi_C + I_2 R_1,$$

откуда

$$I_1 r = I_2 R_1.$$

Окончательно получаем

$$r = \frac{R_1}{R_2} R.$$

113. Ясно, что нижний вольтметр показывает $U_2 = \mathcal{E} - U_1 = 3 \text{ В}$. Сумма токов в общей точке вольтметров равна нулю, а показания каждого вольтметра пропорциональны току через него. (Сопротивления вольтметров одинаковы по условию.) Следовательно,

$$U_3 = U_2 - U_1 = 1 \text{ В}.$$

114. В отсутствие вольтметра сопротивления R и R_1 включены последовательно. Поэтому напряжение на сопротивлении R равно $U_R = \frac{R}{R + R_1} \mathcal{E}$ (сопротивление источника считаем бесконечно малым). При подключении вольтметра он будет измерять напряжение на участке, состоящем из параллельно включенных сопротивления R и сопротивления вольтметра r . Вольтметр покажет

$$U' = \mathcal{E} \frac{Rr}{R + r} \bigg/ \left(\frac{Rr}{R + r} + R_1 \right).$$

По условию, показание вольтметра должно отличаться не более чем на 2% от значения U_R . Поэтому

$$\frac{U_R - U'}{U_R} \leq 0,02.$$

Подставив в это уравнение выражения для U_R и U' , найдем, что сопротивление вольтметра должно превышать 3675 кОм.

115. При подключении вольтметра к точкам A и B его показание равно напряжению источника U . Поэтому, если вольтметр подключен к сопротивлению r_1 , а внутреннее сопротивление вольтметра равно r , то по цепи идет ток

$$I = \frac{U}{r_2 + \frac{r_1 r}{r_1 + r}}$$

и вольтметр показывает

$$U_1 = U \frac{r_1 r}{r_1 + r} \bigg/ \left(r_2 + \frac{r_1 r}{r_1 + r} \right).$$

Точно так же

$$U_2 = U \frac{r_2 r}{r_2 + r} \bigg/ \left(r_1 + \frac{r_2 r}{r_2 + r} \right).$$

Разделив последние два уравнения друг на друга, получим

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Таким образом, $r_1/r_2 = 3/2$.

При отключенном вольтметре напряжение на сопротивлениях r_1 и r_2 равно $U = 12$ В. Так как отношение сопротивлений известно, нетрудно найти и напряжения U'_1 и U'_2 на сопротивлениях:

$$U'_1 + U'_2 = U, \quad \frac{U'_1}{U'_2} = \frac{r_1}{r_2},$$

откуда

$$U'_1 = U \frac{r_1}{r_1 + r_2} = U \frac{1}{1 + r_2/r_1} = 7,2 \text{ В}, \quad U'_2 = U - U'_1 = 4,8 \text{ В}.$$

116. Достаточно сделать два измерения (рис. 108). Первое позволяет определить внутреннее сопротивление амперметра: $r_a = \frac{U_1}{I_1}$, а

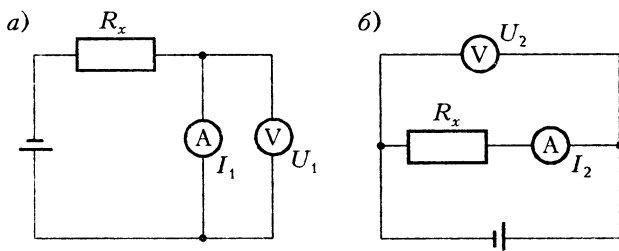


Рис. 108

второе — величину неизвестного сопротивления: $\frac{U_2}{I_2} = R_x + r_a$, откуда $R_x = \frac{U_2}{I_2} - r_a$.

117. Если мы измеряем сопротивление R_x по первой схеме, то мы знаем напряжение U на этом сопротивлении, а ток, идущий через него, точно не известен. Неточность в измерении тока ΔI при известном напряжении приводит к неточности ΔR_x в определении R_x , которая легко находится из закона Ома:

$$IR_x = U, \quad I\Delta R_x + R_x\Delta I = 0.$$

Обозначая R_v сопротивление вольтметра, имеем

$$\Delta IR_v = IR_x.$$

Поэтому

$$\Delta R_x = R_x \frac{\Delta I}{I} = \frac{R_x^2}{R_b}.$$

Для второй схемы аналогично получаем $\Delta R'_x = R_a$, где R_a – сопротивление амперметра.

Таким образом, если $R_x/R_b < R_a/R_x$, то выгоднее пользоваться первой схемой, и наоборот.

118. Для того чтобы найти мощность P , необходимо найти напряжение U на лампочке и ток I через нее. Найдем их.

Если напряжение на лампочке и резисторе сопротивлением R_2 равно U , то напряжение на втором резисторе равно $\mathcal{E} - U$, и ток через него равен

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} - U}{R_1}.$$

Через резистор сопротивлением R_2 течет при этом ток $I_2 = \frac{U}{R_2}$, а через лампочку – ток

$$I = I_1 - I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} - U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Этой зависимости должны удовлетворять ток и напряжение на лампочке. С другой стороны, их значения должны соответствовать вольт-амперной характеристике лампочки. Поэтому, для того чтобы найти U и I , нужно построить оба графика зависимости $I(U)$ и найти соответствующие точки пересечения графиков. Подставив известные величины, зависимость I от U можно записать в виде

$$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} U$$

(I выражается в амперах, а U – в вольтах). Этот график легко построить. Из рисунка 109 видно, что $I \approx 0,4$ А и $U \approx 1,2$ В. Поэтому

$$P = UI \approx 0,48 \text{ В.}$$

119. Построим нагрузочную прямую

$$U = -\frac{R_n R_1}{R_1 + R_n} I + U_0 \frac{R_n}{R_1 + R_n}$$

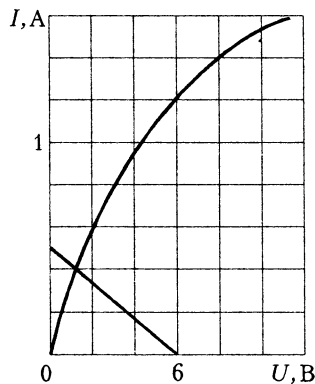


Рис. 109

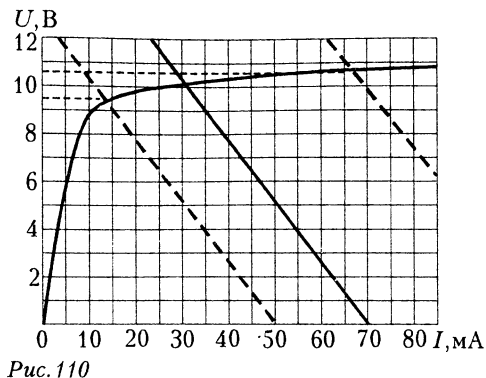


Рис.110

(см. задачу 118). Ее пересечение с исходным графиком (рис.110) определяет рабочее напряжение: $U = 10$ В.

Для того чтобы найти ΔU_0 , необходимо построить нагрузочные прямые с $U = 10 \text{ В} \pm 0,5 \text{ В}$. По этим прямым нетрудно найти пределы изменения напряжения источника: $13 \text{ В} \leq U_0 \leq 29 \text{ В}$.

120. Напряжение U на дуге равно

$$U = U_0 - IR,$$

где U_0 – напряжение источника, I – ток в цепи. С другой стороны, зависимость напряжения U от тока I должна определяться точками графика $U(I)$. Поэтому построим на графике нагрузочную прямую $U = U_0 - IR$ и найдем точки

пересечения этой прямой с вольт-амперной характеристикой дуги (рис.111). Эти точки и определяют возможные значения напряжений на дуге и токов в цепи. Точка a соответствует устойчивому, а точка b – неустойчивому горению дуги. Убедимся в этом, рассмотрев, например, точку b . Предположим, что произошло небольшое случайное уменьшение тока. Напряжение на резисторе окажется при этом больше нового равновесного значения (определяемого законом Ома), а напряжение на дуге – меньше значения, определяемого ее вольт-амперной характеристикой. Будем считать, что приход к новым равновесным значе-

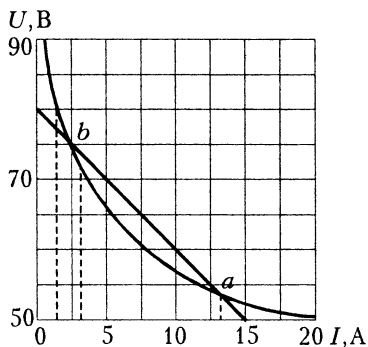


Рис.111

ния (определяемого законом Ома), а напряжение на дуге – меньше значения, определяемого ее вольт-амперной характеристикой. Будем считать, что приход к новым равновесным значе-

ниям параметров (релаксация) происходит на резисторе гораздо быстрее, чем на дуге. Тогда через малое время мы окажемся на нагрузочной прямой левее точки b , и напряжение на дуге начнет возрастать, приближаясь к своему равновесному значению. Это приведет к уменьшению напряжения на резисторе (полное напряжение равно напряжению сети), т. е. к дальнейшему уменьшению тока. Так будет происходить до тех пор, пока дуга не потухнет. Аналогично, при малом случайном увеличении тока он будет возрастать до тех пор, пока система не окажется в точке a .

Напротив, если система находится в точке a , то при малом изменении тока она возвращается назад (убедитесь в этом самостоятельно).

Значит, устойчивое горение дуги происходит при токе $I = 13$ А (см. рис. 111).

121. Прежде всего необходимо построить вольт-амперную характеристику для лампы мощностью 45 Вт. Это можно сделать, предположив, что отношения токов при одном и том же напряжении на двух лампах равно отношению их мощностей. На рисунке 112 вольт-амперная характеристика лампы мощностью 45 Вт показана пунктиром. Сложив обе кривые, получим вольт-амперную характеристику последовательно соединенных ламп. По этому графику (верхняя кривая на рисунке 112) найдем значение тока в лампах при $U = 220$ В и значения напряжений U_1 и U_2 на лампах. Так как $U_1 > 1,1U_{\text{раб}}$, ясно, что такое включение ламп недопустимо.

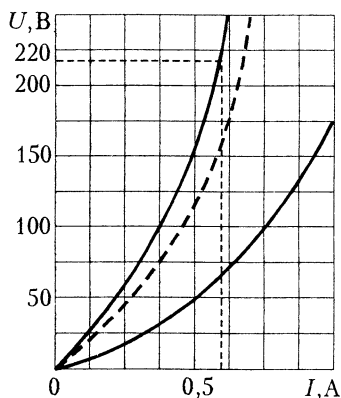


Рис. 112

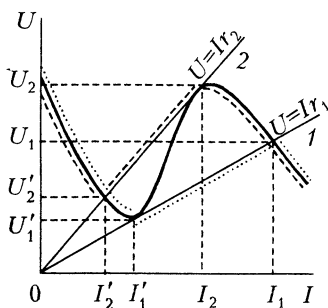


Рис. 113

122. Если в цепи течет ток I , то напряжение на резисторе сопротивлением r будет равно Ir . Поэтому при заданном значении сопротивления ток в цепи и напряжение на резисторе графически находятся как координаты точки пересечения прямой $U = Ir$ с вольт-амперной характеристикой источника (рис. 113). При увеличении сопротивления угол наклона этой прямой с осью I будет расти. При

этом будет увеличиваться напряжение на резисторе. Сопротивление, соответствующее положению 1 прямой, будем обозначать r_1 . Начиная с этого значения сопротивления, ток в цепи может иметь три значения. Однако вплоть до сопротивления r_2 ток будет непрерывно изменяться. Положение 2 соответствует неустойчивости в системе. Небольшое уменьшение тока приводит к его скачкообразному ослаблению до величины I'_2 . При этом напряжение на резисторе тоже уменьшается скачком от U_2 до U'_2 (весь этот процесс на рисунке 113 изображен пунктирными линиями). При дальнейшем увеличении сопротивления напряжение на резисторе будет непрерывно возрастать. При уменьшении сопротивления резистора неустойчивость возникает при сопротивлении r_1 (процесс изображен точечными линиями).

123. Реостат R_1 слабо влияет на напряжение на приборе. Поэтому ясно, что сначала надо установить напряжение на приборе с помощью реостата R_2 и затем подправить его реостатом R_1 . Действительно, если длина реостата равна l , а неточность при установке реостата составляет Δl , то неточность в сопротивлении реостата R_2 равна $\frac{\Delta l}{l} R_2$, а неточность в установке сопротивления

реостата R_1 равна $\frac{\Delta l}{l} R_1 = 0,1 \frac{\Delta l}{l} R_2$, т.е. в 10 раз меньше неточности установки сопротивления реостата R_2 . Поэтому при той тактике, о которой мы говорили, сопротивления реостатов удастся подобрать в 10 раз точнее, чем при использовании только одного реостата R_2 . Во столько же раз точнее будут установлены и напряжения на реостатах, а значит, и напряжение на приборе.

Так как заранее не очевидно, в какую сторону мы ошибемся, устанавливая сопротивление R_2 , т.е. что нам придется делать с помощью реостата R_1 — увеличивать или уменьшать сопротивление, то перед установкой реостата R_2 движок реостата R_1 нужно установить посередине.

Если нам нужно устанавливать как можно точнее не напряжение на приборе, а ток, идущий через него, то в этом случае реостат должен быть включен параллельно прибору как шунт, причем основным в этом случае будет реостат с меньшим сопротивлением — именно через него будет идти наибольший ток. Вторым реостат с большим сопротивлением нужно включить параллельно первому (рис.114) и ток устанавливать так: вначале устано-

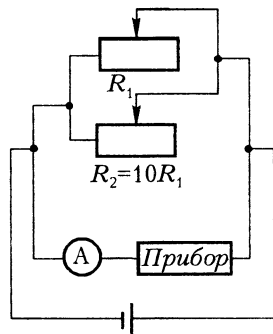


Рис. 114

вить движок реостата R_2 посередине, затем установить ток с помощью реостата R_1 и подправить его с помощью реостата R_2 .

Так как ток, идущий через реостат, равен $I = \frac{U}{R}$, то при неточности установки сопротивления реостата ΔR неточность в установке тока будет равна

$$\Delta I = \frac{U}{R} - \frac{U}{R + \Delta R} = \frac{U \Delta R}{R(R + \Delta R)} \approx \frac{U}{R^2} \Delta R.$$

Используя реостат R_1 , мы получим неточность установки тока $\frac{U}{R_1^2} \frac{\Delta I}{I} R_1 = \frac{U}{R_1} \frac{\Delta I}{I}$, а с помощью реостата R_2 неточность установки тока станет равной $\frac{U}{R_2} \frac{\Delta I}{I} = 0,1 \frac{U}{R_1} \frac{\Delta I}{I}$, т.е. будет в 10 раз меньше, чем при использовании только реостата R_1 .

124. Пусть P – мощность, выделяющаяся в утюге. Тогда за время включения τ_1 в нем выделится энергия $W_1 = P\tau_1$, а за общее время включения и выключения $\tau_1 + \tau_2$ утюг отдаст энергию $W_2 = \alpha(T_1 - T_0)(\tau_1 + \tau_2)$, где T_1 – температура утюга, T_0 – температура воздуха, α – коэффициент пропорциональности. При установившейся температуре утюга в режиме «капрон» $W_1 = W_2$, т.е.

$$P\tau_1 = \alpha(T_1 - T_0)(\tau_1 + \tau_2).$$

Точно так же в режиме, когда регулятор установлен в положение «хлопок»,

$$P\tau'_1 = \alpha(T_2 - T_0)(\tau'_1 + \tau'_2).$$

Из двух последних равенств найдем T_2 :

$$T_2 = \frac{\tau'_1}{\tau_1} \frac{(T_1 - T_0)(\tau_1 + \tau_2)}{\tau'_1 + \tau'_2} + T_0 = 180^\circ \text{C}.$$

Аналогично найдем и T_3 :

$$T_3 = 420^\circ \text{C}.$$

125. Обозначим \mathcal{E} и \mathcal{E}_1 – мощности, излучаемые первой и второй лампочками соответственно, а W и W_1 – мощности, потребляемые ими от сети. Тогда $\mathcal{E} = \eta W$, $\mathcal{E}_1 = \eta W_1$ и $\mathcal{E}_1 = 2\mathcal{E}$, где η – КПД лампочек. Отсюда следует, что

$$\frac{W_1}{W} = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}} = 2.$$

Но $W = \frac{U^2}{R}$ и $W_1 = \frac{U^2}{R_1}$, где U – напряжение сети, $R = \rho \frac{4l}{\pi d^2}$ и

$R_1 = \rho \frac{4l_1}{\pi d_1^2}$ — сопротивления нитей (ρ — удельное сопротивление материала при температуре работы лампы). Поэтому

$$\frac{W_1}{W} = \frac{R}{R_1} = \frac{ld_1^2}{l_1 d^2},$$

так что

$$\frac{ld_1^2}{l_1 d^2} = 2.$$

В состоянии равновесия мощность, получаемая лампочкой от сети, должна быть равна мощности, излучаемой лампочкой в виде света и тепла. Излучаемая мощность, очевидно, пропорциональна площади поверхности нити S и некоторой функции температуры $f(T)$. Следовательно, $W = Sf(T)$. Световой поток, излучаемый лампочкой, также пропорционален площади поверхности нити и некоторой (уже другой) функции температуры $\varphi(T)$: $\varepsilon = S\varphi(T)$. Так как $\varepsilon = \eta W$, то

$$\varphi(T) = \eta f(T).$$

Отсюда следует, что КПД лампочки определяется температурой нити. Следовательно, при одинаковых КПД двух лампочек температуры их нитей накала одинаковы. Это означает, что

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{S_1 \varphi(T)}{S \varphi(T)} = \frac{S_1}{S} = \frac{d_1 l_1}{dl}.$$

Но $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$, следовательно,

$$\frac{d_1 l_1}{dl} = 2.$$

Окончательно находим

$$d_1 = d\sqrt[3]{4} \approx 1,6d, \quad l_1 = l\sqrt[3]{2} \approx 1,3l.$$

126. При подключении концов проволоки к источнику напряжения через нее потечет ток. Проволока будет нагреваться. При этом она удлинится, и ее сопротивление увеличится. В итоге мощность станет меньше, проволока начнет остывать, но под действием сил натяжения еще некоторое время она будет удлиняться (по инерции) и «проскочет» равновесное состояние. И так далее.

Конечно, это происходит не всегда, а только при определенных условиях.

127. Обозначим U напряжение на зажимах электролизной ванны и I — пропускаемый ток. Проводя электролиз воды в течение времени t , необходимо затратить энергию

$$W = UIt = UQ,$$

где Q – заряд, прошедший через ванну. При этом из ванны выделится масса водорода

$$m = \frac{MQ}{N_A e},$$

где $M = 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса выделяющегося атомарного водорода, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд иона водорода и $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$ – постоянная Авогадро. При сгорании этого водорода образуется вновь вода и выделяется энергия

$$W_1 = mq,$$

где q – удельная теплота сгорания. Из закона сохранения энергии следует, что $W > W_1$, т.е.

$$UQ > \frac{MQ}{N_A e} q,$$

откуда получим, что напряжение U должно быть больше

$$U_{\min} = \frac{Mq}{N_A e} \approx 1,23 \text{ В.}$$

128. У старой батарейки большое внутреннее сопротивление. Из закона Ома для полной цепи легко видеть, что увеличение внутреннего сопротивления батарейки приводит к уменьшению тока в цепи.

129. Батарея гальванических элементов имеет конечное внутреннее сопротивление, поэтому напряжение на лампе меньше ЭДС батареи на величину падения напряжения на внутреннем сопротивлении. Если разряжать через лампу конденсатор, то все напряжение падает на лампу. По мере разрядки конденсатора напряжение на лампе уменьшается, но если взять конденсатор большой емкости, то заряд, накопленный в нем, будет большим и в течение достаточного промежутка времени разность потенциалов между обкладками конденсатора (а следовательно, и напряжение на лампе) будет практически постоянным.

130. Нить лампочки нагревается не сразу. Так как сопротивление ненагретой нити мало, то некоторое время после включения лампочки в сеть через нее течет большой ток. Сопротивление тонких небольших участков нити больше сопротивления других таких же по длине, но более толстых участков. Поэтому на тонких участках выделяется больше тепла. Теплоотвод же, пропорциональный площади поверхности участка, меньше, чем в случае толстого участка. Это приводит к тому, что тонкие участки нагреваются значительно быстрее всей нити, причем при нагревании сопротивление тонкого участка возрастает, что приводит к еще большему выделению тепла и нагреванию. Увеличение сопротивления тонкого участка мало

влияет на сопротивление всей нити, и через нить все еще идет большой ток. Все это приводит к перегреву тонкого участка и его сгоранию.

Если диаметр тонкого участка мало отличается от диаметра нити или его длина сравнима с длиной нити, то вся нить успевает прогреться, а ток через нее уменьшается до безопасной величины.

131. Находящийся в магнитном поле конденсатор, заполненный проводящей жидкостью, представляет собой источник тока. Найдем ЭДС и внутреннее сопротивление этого источника.

На свободные заряды проводящей жидкости, движущиеся со скоростью v , в магнитном поле действует сила Лоренца $F_L = qvB$, искривляющая траектории зарядов. В результате заряды оседают на пластинах конденсатора. Если конденсатор не замкнут на внешнее сопротивление, процесс зарядки продолжается до тех пор, пока сила, действующая на заряды со стороны возникающего электрического поля, не уравнивает силу Лоренца. Из этого условия найдем напряженность электрического поля в конденсаторе, не замкнутом на внешнее сопротивление: $F_{эл} = F_L$, или $Eq = qvB$, откуда $E = vB$. Следовательно, разность потенциалов между пластинами такого конденсатора (ЭДС) равна $\mathcal{E} = vBd$. Внутреннее сопротивление конденсатора равно сопротивлению проводящей жидкости между

обкладками: $r = \rho \frac{d}{S}$.

При подключении к конденсатору внешнего сопротивления R по цепи идет ток $I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$. При этом на сопротивлении R выделяется мощность

$$P = I^2 R = \frac{(vBd)^2 R}{(R + \rho d/S)^2}.$$

132. Электроны вылетают из электронной пушки трубки с небольшим угловым разбросом скоростей и попадают в магнитное поле. При этом в направлении оси электроны имеют одинаковые

составляющие скоростей, равные $v_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$, и различные состав-

ляющие, перпендикулярные оси и намного меньшие v_1 . Движение вдоль оси – равномерное и прямолинейное. Наличие же перпендикулярных оси составляющих приводит к искривлению траектории движения электронов. На электрон, влетающий в магнитное поле перпендикулярно его силовым линиям, действует сила Лоренца, равная $F = evB$, где v – перпендикулярная \vec{B} составляющая скорости электрона. Эта сила сообщает электрону центростремительное ускорение $a = v^2/R$, где R – радиус окружности, по которой

будет двигаться электрон. Согласно второму закону Ньютона,

$$\frac{mv^2}{R} = evB,$$

откуда

$$R = \frac{mv}{eB}.$$

Период T и частота ω вращения электрона по окружности равны

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{eB} \text{ и } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{eB}{m}.$$

Мы получили очень важный результат: какими бы ни были составляющие скоростей электронов, перпендикулярные оси трубки, все электроны совершают один оборот за одно и то же время. Если бы составляющие скоростей электронов, параллельные оси трубки, были все равны нулю, то траекториями электронов были бы окружности разных радиусов, проходящие через одну точку — точку вылета электронов из пушки (рис. 115), причем в эту точку все электроны приходили бы одновременно.

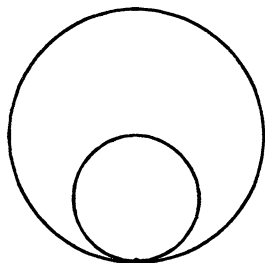


Рис. 115

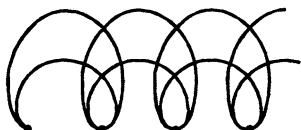


Рис. 116

Так как электроны участвуют еще и в равномерном прямолинейном движении вдоль оси трубки, то результирующими траекториями их движений будут винтовые линии. Эти линии будут пересекаться на каждом шаге винта (рис. 116), так как составляющие скоростей, параллельные оси, одинаковы для всех электронов. В точках пересечения траекторий, очевидно, и фокусируется электронный пучок.

Итак, электронное пятно на экране будет собираться в точку, если расстояние L от электронной пушки до экрана будет кратно шагу винтовой линии $h = v_1 T$, т.е. если

$$L = nv_1 T = n \sqrt{\frac{2eU}{m}} \cdot \frac{2\pi m}{eB} = \frac{n}{B} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{2mU}{e}},$$

причем при $B = B_0$ $n = 1$, при $B = 2B_0$ $n = 2$ и т.д.

С помощью такого эксперимента можно определить отношение заряда электрона к его массе. Действительно, из последней формулы для $n = 1$ получаем

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 U}{L^2 B_0^2}.$$

Измерив v , L и B_0 , нетрудно найти отношение e/m .

Мы показали, что радиус окружности, по которой движется заряженная частица в однородном магнитном поле, обратно пропорционален индукции B поля и может быть сделан очень маленьким. На этом основана идея магнитной изоляции плазмы. Температура плазмы для осуществления управляемых термоядерных реакций должна достигать сотен миллионов градусов ($10^8 - 10^9$ К), и поэтому необходимо изолировать плазму, не допуская ее контактов со стенками установки. В цилиндрической установке это можно сделать с помощью магнитного поля, направленного вдоль оси цилиндра. В таком поле электроны и ионы будут вращаться в разных направлениях по окружностям радиусом

$$R = \frac{mv}{qB},$$

где m — масса частицы и q — ее заряд.

В сечении, перпендикулярном полю, движение одного сорта частиц в плазме выглядит так, как показано на рисунке 117. Кольцевые токи, которые связаны с таким движением, взаимно уничтожаются внутри плазменного столба, а на границе столба образуют кольцевой ток. Взаимодействие этого тока с магнитным полем и удерживает плазму. Правда, остаются концы цилиндра. Для удержания плазмы там используются неоднородные поля, в которых частицы плазмы отражаются от концов. Другой вариант установки — обойтись вообще без концов, поместив плазму в тороидальную камеру. Таково, например, устройство установок «Токамак».

133. Величина тока I зависит от скорости частиц так:

$$I = en_0 v S,$$

где e — заряд протона, n_0 — число протонов в единице объема, S — площадь сечения пучка, v — скорость. Будем считать что протоны равномерно распределены по своей орбите, поэтому (учитывая, что пучок очень узкий)

$$n_0 = \frac{n}{2\pi RS}.$$

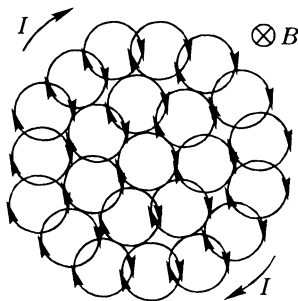


Рис. 117

Тогда

$$I = \frac{en}{2\pi R} v.$$

Таким образом, чтобы найти ток, нужно найти скорость протонов. Начальную скорость мы знаем. Она равна

$$v_0 = \frac{2\pi R I_0}{ne}.$$

Так как магнитный поток в камере ускорителя меняется, то в ней индуцируется ЭДС индукции, равная скорости изменения магнитного потока Φ , т.е.

$$\mathcal{E} = \dot{\Phi}.$$

Когда протон сделает один оборот, электрическое поле совершит над ним работу, равную $\mathcal{E}e$, которая пойдет на изменение кинетической энергии протона:

$$\mathcal{E}e = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

(m – масса протона). Отсюда найдем скорость протона после того, как он сделает один оборот в камере ускорителя:

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2\mathcal{E}e}{m}}.$$

Тогда ток в камере будет

$$I = \frac{ne}{2\pi R} \sqrt{\left(\frac{2\pi R}{ne} I_0\right)^2 + 2\Phi \frac{e}{m}} = I_0 \sqrt{1 + \frac{n^2 e^3 \Phi}{2\pi^2 R^2 m I_0^2}}.$$

134. Так как омические сопротивления катушек равны нулю, напряжения на катушках равны ЭДС индукции, поэтому можно записать

$$L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t},$$

откуда получаем равенство магнитных потоков:

$$L_1 I_1 = L_2 I_2,$$

где I_1 и I_2 – токи через первую и вторую катушки. Из закона сохранения энергии следует, что эти токи максимальны при условии

$$\frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} = \frac{CU^2}{2}.$$

Окончательно найдем

$$I_1 = U \sqrt{\frac{CL_2}{L_1(L_1 + L_2)}}, \quad I_2 = U \sqrt{\frac{CL_1}{L_2(L_1 + L_2)}}.$$

135. Поток через первую катушку пропорционален $\frac{I_1}{l_1} n_1^2 S_1$, а через вторую — $\frac{I_2}{l_2} n_2^2 S_2$ (где I_1 и I_2 — величины токов в катушках).

Приравнявая эти выражения (см. задачу 134), получим

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \frac{S_2 l_1}{S_1 l_2}. \text{ Учитывая, что } I_1 + I_2 = I, \text{ найдем}$$

$$I_1 = I \frac{x}{1+x}, \quad I_2 = I \frac{1}{1+x}, \quad \text{где } x = \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \frac{S_2 l_1}{S_1 l_2}.$$

136. Через короткозамкнутый виток потечет большой ток, так как образующаяся в нем ЭДС замыкается на его собственное сопротивление (которое очень мало). В исправном работающем трансформаторе ЭДС, образующаяся в обмотке, замыкается на большое внешнее сопротивление.

137. ЭДС индукции в обмотке трансформатора пропорциональна числу витков и скорости изменения магнитного потока:

$$\mathcal{E} = n \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

Но в присутствии железного сердечника сам магнитный поток через каждый виток пропорционален числу витков (в отличие от соленоида, описанного в задаче 135, в этом случае магнитный поток от каждого витка пронизывает все остальные витки). Следовательно, ЭДС в первичной обмотке первого трансформатора и вторичной обмотке второго пропорциональны квадратам чисел витков обмоток:

$$\mathcal{E}_1 = k n_1^2, \quad \mathcal{E}_2 = k n_2^2 = k(3n_1)^2 = 9k n_1^2 = 9\mathcal{E}_1$$

(k — постоянная). Сумма же $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ равна напряжению U_0 сети ($U_0 = 100 \text{ В}$):

$$\mathcal{E}_1 + 9\mathcal{E}_1 = U_0.$$

Отсюда

$$\mathcal{E}_1 = 0,1 U_0 = 10 \text{ В}.$$

Напряжение на вторичной обмотке первого трансформатора равно

$$U_1 = \frac{n_2}{n_1} \mathcal{E}_1 = 3\mathcal{E}_1 = 30 \text{ В}.$$

Напряжение на первичной обмотке второго трансформатора равно

$$U_2 = \frac{n_1}{n_2} \mathcal{E}_2 = \frac{1}{3} \cdot 9\mathcal{E}_1 = 3\mathcal{E}_1 = 30 \text{ В}.$$

Напряжение U на свободных концах этих обмоток может быть равно $U_1 + U_2$, если они включены так, что ЭДС имеют одинаковые «направления», или же $U_1 - U_2$, если они включены «навстречу» друг другу. В первом случае $U = 60 \text{ В}$, а во втором $U = 0$.

138. Обозначим действующее значение ЭДС индукции, возникающей в первичной обмотке ненагруженного трансформатора, \mathcal{E}_1 , а во вторичной обмотке \mathcal{E}_2 . Очевидно, что

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{n_1}{n_2} = k,$$

где n_1 — число витков в первичной обмотке, n_2 — во вторичной обмотке и $k = n_1/n_2$ — коэффициент трансформации. Поскольку в ненагруженном трансформаторе $\mathcal{E}_1 = U_0$ и $\mathcal{E}_2 = U_1$, где $U_0 = 220 \text{ В}$ и $U_1 = 127 \text{ В}$, то

$$k = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{U_0}{U_1} \approx \sqrt{3}.$$

Когда трансформатор нагружен, т.е. ко вторичной обмотке подключено сопротивление R , по первичной обмотке идет ток

$$I_1 = \frac{U_0 - \mathcal{E}'_1}{r_1},$$

а по вторичной обмотке —

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}'_2}{R + r_2}.$$

Здесь \mathcal{E}'_1 и \mathcal{E}'_2 — ЭДС индукции в первичной и вторичной обмотках нагруженного трансформатора, r_1 и r_2 — сопротивления обмоток.

Коэффициент полезного действия трансформатора практически равен единице. Это означает, что мощность, вырабатываемая в первичной обмотке трансформатора, равна мощности, передаваемой во вторичную цепь:

$$I_1 \mathcal{E}'_1 = I_2 \mathcal{E}'_2.$$

Тогда

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\mathcal{E}'_1}{\mathcal{E}'_2} = k.$$

Окончательно найдем

$$I_2 = \frac{kU_0}{r_1 + k^2(R + r_2)}, \quad U_2 = I_2 R = \frac{kU_0 R}{r_1 + k^2(R + r_2)} \approx 110 \text{ В}.$$

В описанном случае трансформатор не идеален, но потери энергии связаны только с омическим сопротивлением обмоток.

139. Обозначим U напряжение, до которого зарядится конденсатор. Его заряд $q = CU$, а энергия $W = CU^2/2$. Эта энергия равна работе, совершенной источником тока:

$$A = \varepsilon q = \varepsilon CU = \frac{CU^2}{2}.$$

Отсюда

$$U = 2\varepsilon.$$

Напряжение оказывается вдвое бóльшим, чем при непосредственном подключении конденсатора к источнику. Связано это вот с чем.

Вначале ток увеличивается, и ЭДС индукции в катушке «направлена» противоположно ЭДС источника. Часть работы, совершаемой источником, идет на увеличение энергии магнитного поля катушки, которая запасает эту энергию. При $U = \varepsilon$ энергия магнитного поля

максимальна и равна $\varepsilon \cdot C\varepsilon - \frac{1}{2}C\varepsilon^2$, т.е. половине работы источни-

ка. Максимален в этот момент и ток в катушке, а ЭДС равна нулю.

В дальнейшем ток начинает уменьшаться, и «направление» ЭДС индукции становится таким же, как у источника, увеличивая таким образом напряжение на конденсаторе, энергия которого продолжает увеличиваться как за счет работы источника, так и за счет энергии, запасенной катушкой.

140. Если резистор сопротивлением R подключен непосредственно к сети переменного тока, то в нем выделяется мощность, равная U^2/R , где U — действующее значение напряжения. В случае если резистор подключен к сети через диод, в нем выделяется мощность в два раза меньшая (полпериода ток через резистор не течет):

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{U^2}{R}.$$

Теперь найдем мощность P_2 , выделяющуюся в резисторе при подсоединении параллельно ему конденсатора. В условии задачи сказано, что за период колебаний напряжения в сети заряд конденсатора практически не меняется. Это означает, что время разрядки конденсатора велико по сравнению с периодом колебаний. В таком случае напряжение на конденсаторе можно считать постоянным и равным амплитудному значению U_0 . Тогда

$$P_2 = \frac{U_0^2}{R} = \frac{(\sqrt{2}U)^2}{R} = \frac{2U^2}{R},$$

поскольку амплитудное значение напряжения больше действующе-

го значения в $\sqrt{2}$ раз. Отношение мощностей, выделяемых в резисторе с подключенным конденсатором и без конденсатора, равно

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2U^2 \cdot 2R}{R \cdot U^2} = 4.$$

Таким образом, при подсоединении конденсатора параллельно резистору в нем выделится мощность в четыре раза бóльшая.

141. Если бы стенки не было, маятник совершал бы гармонические колебания с угловой амплитудой (максимальным углом отклонения от вертикали) β и периодом

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

При упругом столкновении со стенкой абсолютная величина скорости маятника не изменяется, а направление движения меняется на противоположное. Это означает, что период колебаний маятника T в присутствии стенки не равен T_0 , а меньше этой величины на время τ , за которое маятник, совершая свободные колебания, отклонился бы от вертикали вправо от угла α до угла β и вернулся обратно.

Запишем уравнение гармонических колебаний для углового перемещения φ :

$$\varphi = \beta \cos \omega t,$$

где $\omega = 2\pi/T_0$. График зависимости $\varphi(\omega t)$ показан на рисунке 118.

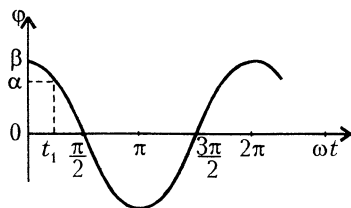


Рис. 118

В момент времени $t = 0$ $\varphi = \beta$, т.е. маятник находится в крайнем правом положении. Через некоторое время t_1 угол отклонения маятника от вертикали станет равным α . Из уравнения $\alpha = \beta \cos \omega t_1$ получаем

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{\alpha}{\beta}.$$

Из симметрии очевидно, что

$$\tau = 2t_1 = \frac{2}{\omega} \arccos \frac{\alpha}{\beta} = \frac{T_0}{\pi} \arccos \frac{\alpha}{\beta}.$$

Тогда окончательно

$$T = T_0 - \tau = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \left(\pi - \arccos \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

142. В положении устойчивого равновесия молекула располагается вдоль поля (рис.119). Если ее вывести из этого состояния, то возникает вращательный момент, поворачивающий молекулу вокруг ее центра масс. Этот момент создают силы \vec{F} и $-\vec{F}$, действующие на заряды в электрическом поле. Если рассматривать заряды каждый в отдельности, то можно сказать, что электрические силы для них играют такую же роль, как сила тяжести для математического маятника. Поэтому заряды колеблются, подобно математическим маятникам длиной $l/2$. Воспользуемся этой аналогией и запишем период колебаний молекулы так:

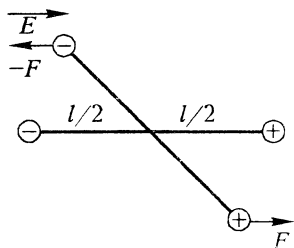


Рис. 119

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g'}}$$

где g' – ускорение, которое электрическое поле сообщает каждому заряду. Так как $g' = F/m$, а $F = eE$, то $g' = eE/m$. Поэтому

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{lm}{2eE}} \approx 2 \cdot 10^{-11} \text{ с.}$$

143. Обозначим жесткость пружинок модели молекулы k , массы атомов кислорода – M и массу атома углерода – m ($m/M = 12/16$).

Совершая колебания типа а), оба атома кислорода колеблются синхронно относительно неподвижного атома углерода. Это связано с тем, что в силу симметрии колебаний атомов кислорода на атом углерода в любой момент действуют с обеих сторон равные по абсолютной величине и противоположно направленные силы, которые «уравновешивают» друг друга. Поэтому в случае а) атомы кислорода совершают свободные колебания, частота которых равна

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{M}}.$$

При колебаниях типа б) на атом углерода действуют равные по абсолютной величине силы, направленные в одну и ту же сторону. Если атом углерода «разбить» на две равные части, то ясно, что они будут колебаться как одно целое: на них всегда действуют равные силы, и, следовательно, шарики-половинки в любой момент будут иметь одинаковые ускорения, скорости и координаты. Частота колебаний молекулы CO_2 равна частоте колебаний системы, состоящей из атома кислорода и половины атома углерода. Таким

образом, задача сводится к определению частоты колебаний соединенных пружиной шариков массами M и $\frac{1}{2}m$. Такие шарики колеблются около неподвижного центра масс системы. Если длина пружинки в нерастянутом состоянии равна l , то центр масс системы находится на расстоянии $\frac{m}{m+2M}l$ от шарика массой M . Поэтому можно считать, что шарик массой M (атом кислорода) колеблется относительно центра масс на пружинке длиной

$$l_1 = l \frac{m}{m+2M}.$$

Жесткость части пружинки больше жесткости целой пружинки и равна

$$k_1 = k \frac{l}{l_1} = k \frac{m+2M}{m}.$$

Частота колебаний шарика массой M на пружинке жесткостью k_1 равна

$$\omega_6 = \sqrt{\frac{k_1}{M}} = \sqrt{\frac{k(m+2M)}{mM}}.$$

Тогда отношение частот равно

$$\frac{\omega_a}{\omega_6} = \sqrt{\frac{m}{m+2M}} = \sqrt{\frac{3}{11}}.$$

144. Автомобиль на рессорах представляет собой сложную колебательную систему. Он может совершать вертикальные колебания, крутильные колебания вокруг оси, параллельной дороге, и крутильные колебания вокруг оси, идущей поперек дороги. Кроме того, благодаря упругости шин он может совершать различные колебания в горизонтальной плоскости. Эти колебания определяют устойчивость автомобиля при его прямолинейном движении и, как говорят, легкость управления автомобилем. Для разрушения дороги наиболее существенны вертикальные колебания автомобиля и крутильные колебания в вертикальной плоскости. При обсуждении вертикальных колебаний системы автомобиль – колеса можно воспользоваться результатом, полученным в решении предыдущей задачи. Обозначим m массу колес, M – массу кузова, k – жесткость рессор. Будем считать, что шины очень жесткие. Тогда собственная частота колебаний системы равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}.$$

Аналогичную формулу можно получить и для крутильных колеба-

ний. Точный вид этой формулы нам в данном случае несуществен. Важно только то, что частота колебаний убывает при увеличении массы кузова. При $m \ll M$ частота ω стремится к $\sqrt{k/m}$ – собственной частоте колебаний груза массой m на пружине жесткостью k .

Если на дороге имеется ухаб, то при определенной скорости автомобиля колесо подпрыгнет. Через время, равное половине периода колебаний системы, оно ударится о землю, вызывая разрушение дороги. При ударе колесо движется под некоторым углом к дороге. Такой удар вызывает небольшое перемещение материала дороги вперед и образование нового ухаба. Когда по дороге пройдет много машин, дорога станет гофрированной, подобно стиральной доске. Расстояние между ухабами определяется скоростью автомобиля и частотой колебаний:

$$l \sim \frac{1}{2} vT = \frac{\pi v}{\omega}.$$

При одной и той же скорости автомобиля это расстояние тем больше, тем меньше ω и, следовательно, чем больше масса кузова. Поэтому в нашем случае автомобили шли слева направо.

Такие «стиральные доски» на дорогах часто возникают у перекрестков, на которых стоят светофоры. Связано это с тем, что при резком торможении автомобиля передняя часть кузова наклоняется. Это становится причиной возникновения колебаний даже на идеально гладкой дороге. Отметим, что амплитуды колебаний колес и кузова относятся, как их расстояния до центра масс системы:

$$\frac{a_{\text{кол}}}{a_{\text{куз}}} = \frac{M}{m}.$$

При $M \gg m$ пассажир может вообще не ощутить колебаний колес.

Интересно, что существует критическая скорость для каждой дороги, при которой начинаются подскоки колес.

145. Обозначим A амплитуду колебаний мембраны и $\omega = 2\pi\nu$ – ее циклическую частоту. Тогда зависимость координаты x мембраны от времени t можно представить в виде (ось X направлена вертикально вверх) $x = A \sin \omega t$. Скорость v мембраны и ее ускорение a в момент времени t равны

$$v = A\omega \cos \omega t \text{ и } a = -A\omega^2 \sin \omega t.$$

На песчинку массой m действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции мембраны \vec{N} . Запишем уравнение ее движения (в проекциях на ось X):

$$N - mg = ma.$$

В момент отрыва песчинки от мембраны $N = 0$ и, следовательно, $a = -g$. Это означает, что песчинка отрывается от мембраны в тот момент t_0 , в который $-A\omega^2 \sin \omega t_0 = -g$, или $\sin \omega t_0 = \frac{g}{A\omega^2}$. Скорость мембраны и песчинки в этот момент времени, а также их координата равны

$$v_0 = A\omega \cos \omega t_0 \text{ и } x_0 = A \sin \omega t_0 = \frac{g}{\omega^2}.$$

В дальнейшем песчинка движется в поле тяжести, поднимаясь на высоту Δx , и можно воспользоваться законом сохранения энергии:

$$mg\Delta x = \frac{mv_0^2}{2},$$

откуда

$$\Delta x = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Так как $h = x_0 + \Delta x$, то

$$h = \frac{g}{\omega^2} + \frac{\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t_0}{2g} = \frac{g}{2\omega^2} + \frac{A^2 \omega^2}{2g}.$$

Отсюда найдем A :

$$A = \frac{\sqrt{2gh\omega^2 - g^2}}{\omega^2} \approx 7,7 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,077 \text{ мм}.$$

146. В горизонтальном направлении на доску действуют только силы сухого трения со стороны вращающихся цилиндров (рис. 120). Каждая сила трения направлена в сторону, противоположную относительной скорости доски, и пропорциональна силе нормально-го давления (а значит, и реакции опоры). Если доска находится в равновесии, то силы трения равны по модулю. Следовательно, равны и силы нормальной реакции каждого из цилиндров. Это означает, что центр тяжести доски при равновесии находится между цилиндрами на одинаковом расстоянии от каждого из них.

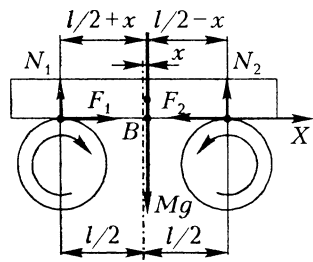


Рис. 120

Пусть теперь доска смещена от своего положения равновесия на расстояние $x < l/2$, например, вправо. В этом положении силы нормальной реакции \vec{N}_1 и \vec{N}_2 уже не будут равны друг другу, а потому не будут компенсировать друг друга и силы сухого трения \vec{F}_1 и \vec{F}_2 . Равнодействующая

\vec{F} сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 сообщит доске горизонтальное ускорение. Найдем его, вычислив предварительно N_1 и N_2 из условия отсутствия вертикального ускорения:

$$N_1 + N_2 - Mg = 0,$$

и условия равенства нулю момента внешних сил относительно оси, проходящей через точку B :

$$N_2 \left(\frac{1}{2}l - x \right) - N_1 \left(\frac{1}{2}l + x \right) = 0.$$

Отсюда

$$N_1 = Mg \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right), \quad N_2 = Mg \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l} \right).$$

Следовательно, сумма проекций сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 на ось X , направленную вправо, равна

$$F = F_1 - F_2 = \mu(N_1 - N_2) = -\frac{2\mu Mg}{l}x.$$

Мы видим, что F пропорциональна по модулю смещению x доски от положения равновесия и направлена в сторону, противоположную смещению, т.е. к положению равновесия. Таким образом, эта сила является «возвращающей» силой, аналогичной той, которая возникает при колебаниях маятника. Следовательно, доска совершает гармонические колебания.

Период колебаний можно найти, записав уравнение движения доски для проекций на ось X :

$$Ma = -\frac{2\mu Mg}{l}x, \text{ или } a = -\frac{2\mu g}{l}x.$$

Модуль коэффициента пропорциональности между смещением и ускорением представляет собой квадрат циклической частоты колебаний:

$$\omega_0^2 = \frac{2\mu g}{l}.$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2\mu g}}.$$

При изменении направлений вращения цилиндров на противоположные результирующая горизонтальная сила также изменит свое направление. При смещении доски эта сила уже не будет возвращать ее к положению равновесия, а, наоборот, будет уводить тем дальше,

чем больше было первоначальное смещение. В результате доска соскочит с цилиндров.

147. Рассмотрим математический маятник, частота малых колебаний которого равна ω . Длина L такого маятника такова, что $\omega = \sqrt{g/L}$, так что $L = g/\omega^2$. При малых колебаниях можно считать, что все точки маятника движутся по горизонтальным прямым. Амплитуду b колебаний маятника можно сделать такой, чтобы амплитуда колебаний точки A , находящейся на расстоянии l от груза маятника, была равна a .

Колебания маятника, очевидно, не изменятся, если мы сделаем точкой подвеса маятника точку A и будем поддерживать ее колебания такими, чтобы смещения остались прежними в каждый момент

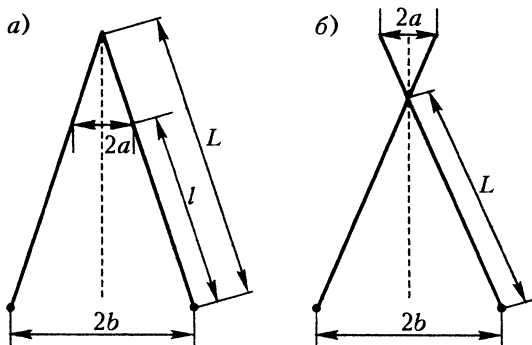


Рис. 121

времени. Если $l < L$ (или $l < g/\omega^2$), то, как видно из рисунка 121, а,

$$\frac{b}{a} = \frac{L}{L - l},$$

откуда

$$b = a \frac{g/l}{g/l - \omega^2} = a \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

где $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Фаза колебаний в этом случае совпадает с фазой колебаний точки подвеса.

Условие $l < g/\omega^2$ означает, что $\omega < \sqrt{g/l}$. Но $\sqrt{g/l}$ равен частоте ω_0 свободных колебаний маятника. Следовательно, наше условие означает, что $\omega < \omega_0$. Если маятник совершает вынужденные колебания с частотой ω , меньшей частоты ω_0 собственных колебаний, то фаза колебаний маятника совпадает с фазой вынуждающей внешней силы.

Если $\omega > \omega_0$, то $\sqrt{g/l} > \sqrt{g/L}$ и $l > L$ (см. рис.121,б). Тогда

$$\frac{b}{a} = \frac{L}{l-L}, \text{ и } b = a \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Фаза колебаний в этом случае противоположна фазе вынуждающей силы.

При $\omega \rightarrow \omega_0$ амплитуда колебаний становится большой (резонанс), и наши рассуждения несправедливы.

Решение этой задачи помогает понять, почему максимумы приливов наступают вовсе не в те моменты, когда Луна находится в зените или в надире (с противоположной стороны Земли). В большинстве районов земного шара приливы отстают от видимого движения Луны на $\pi/2$ (на $1/4$ суток по времени). Остановимся на этом подробнее. Забудем для начала о движении Луны вокруг Земли и будем для простоты считать, что Земля – это твердый шар, покрытый океаном. Поле тяготения Луны неоднородно и убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до центра Луны. Поэтому ускорение, которое сообщается в таком поле всей Земле (центру масс Земли), несколько меньше ускорения, сообщаемого частицам океана, находящимся непосредственно под Луной (наиболее близким к Луне), и несколько больше ускорения, сообщаемого частицам океана на противоположной стороне Земли. По этой причине сферическая равновесная форма поверхности океана невозможна. На частицы океана должны действовать еще какие-то силы, которые, складываясь с силой тяготения Луны, сообщали бы частицам океана ускорения такие же, как ускорение центра масс Земли. Такие силы могут возникнуть только при отклонении формы поверхности океана от сферической, причем выпуклости должны находиться непосредственно под Луной и с обратной стороны Земли. Высоту приливов можно найти из условия, что поверхность океана эквипотенциальна, иными словами, потенциальная энергия всех частиц поверхности океана одинакова. Расчет, аналогичный приведенному в задаче 41, для высоты h прилива дает

$$h \approx \frac{3}{2} \frac{M_{\text{Л}}}{M_{\text{З}}} \frac{R_{\text{З}}}{l}$$

($M_{\text{Л}}$ – масса Луны, $M_{\text{З}}$ – масса Земли, $R_{\text{З}}$ – радиус Земли, l – расстояние между центрами Земли и Луны).

Такая теория приливов была разработана еще Ньютоном, который впервые правильно объяснил, почему бывает два прилива. Ее называют статической теорией, так как она не учитывает движение Луны и вызванное им движение приливных горбов – приливных волн. Круговое движение аналогично движению колебательному. Поэтому можно сказать, что приливы совершают вынужденные

колебания, обегая Землю. Это движение должно происходить так же, как вынужденные колебания математического маятника, которые мы только что рассмотрели.

При решении задачи 34 мы нашли, что свободная приливная волна обегала бы Земной шар за 50 часов. Так как приливных горбов два, то собственный период приливов был бы равен 25 часам. Период же видимого обращения Луны вокруг Земли составляет 25 часов, и, следовательно, период вынуждающей силы для приливных колебаний равен 12,5 часа. Период приливообразующей силы меньше периода собственных колебаний приливов, а частота приливообразующей силы больше частоты приливных колебаний. Поэтому фазы движения Луны и приливов при вынужденном движении приливных волн противоположны. Это соответствует картине приливов в большинстве районов земного шара.

148. Когда мы поднимаем маятник, мы совершаем работу и увеличиваем его потенциальную энергию. Когда маятник опускается, сила тяжести совершает работу, и потенциальная энергия маятника уменьшается. Но все дело в том, что в систему поступает энергии больше, чем расходуется. Действительно, поднимая за нить маятник на высоту h и тем самым укорачивая на h длину нити, мы совершаем работу

$$A_1 = F_1 h = \left(mg + \frac{mv^2}{R} \right) h$$

(поскольку равнодействующая сил \vec{F}_1 и $m\vec{g}$ сообщает маятнику центростремительное ускорение, то $F_1 - mg = \frac{mv^2}{R}$). Когда же в точке максимального отклонения от положения равновесия мы даем возможность маятнику опуститься, т.е. увеличиваем до первоначального значения длину нити, сила тяжести совершает работу

$$A_2 = mgh \cos \alpha,$$

так как перемещение маятника по вертикали равно $h \cos \alpha$. Таким образом, в систему поступает энергия

$$E = A_1 - A_2.$$

Она больше нуля, поэтому амплитуда колебаний будет увеличиваться (конечно, если поступающая энергия превышает работу сил сопротивления).

Нетрудно понять, почему качели раскачиваются, если присесть всякий раз, когда качели максимально отклонены, и вставать при прохождении положения равновесия. И в этом случае как бы меняется длина нити маятника (если длиной нити считать расстоя-

ние от точки подвеса до положения центра тяжести человека), а роль силы натяжения нити выполняет сила реакции со стороны ног \vec{N} .

В положении равновесия $N = mg + \frac{mv^2}{R}$ и

$$A_1 = \left(mg + \frac{mv^2}{R} \right) h,$$

где h – высота подъема центра тяжести. Когда качели максимально отклонены и человек приседает, сила тяжести совершает работу

$$A_2 = mgh \cos \alpha.$$

За период система получает энергию

$$E = 2(A_1 - A_2) = 2h \left(\frac{mv^2}{2} + mg(1 - \cos \alpha) \right).$$

Эта величина положительна, поэтому энергия и, следовательно, амплитуда колебаний будут увеличиваться.

Оба примера показывают, как можно увеличить энергию колебаний периодическим изменением параметров системы с частотой, вдвое большей частоты колебаний. Такое возбуждение колебаний называется параметрическим, а резонанс изменений параметров с частотой колебаний называется параметрическим резонансом.

Красивое использование параметрического резонанса в космической технике предложили советские ученые В.Белецкий и М.Гиверц.

Представим себе космический корабль, который состоит из двух раздвижных половинок, так что при необходимости корабль принимает форму гантели. Если корабль движется по эллиптической орбите вокруг планеты (звезды) массой M , то потенциальная энергия корабля со сдвинутыми половинками на расстоянии R от

центра планеты равна $-G \frac{Mm}{R}$, где m

– масса корабля. Раздвинем половинки корабля на расстояние $2l$ так, чтобы гантелька была перпендикулярна к плоскости орбиты (рис. 122).

При расстоянии от центра O планеты до центра масс корабля, равном R , расстояние до частей корабля равно $R/\cos \alpha$, где $\alpha \approx \text{tg } \alpha = l/R$ (этот угол, конечно, мал, так как $l \ll R$).

Следовательно, силы, действующие

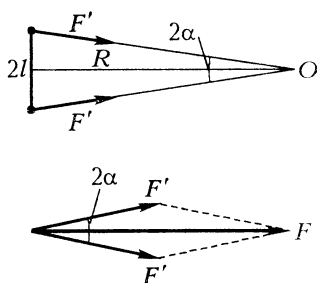


Рис. 122

на половинки корабля, равны $F' = \frac{1}{2} G \frac{Mm}{R^2} \cos^2 \alpha$, а их равнодействующая равна $F = 2F' \cos \alpha = G \frac{Mm}{R^2} \cos^3 \alpha$. Эта сила в $\cos^3 \alpha$ раз отличается от силы, действующей на корабль со сдвинутыми половинками. Если гантельку перемещать из одной точки в другую, оставляя угол α неизменным, то работа и, следовательно, изменение потенциальной энергии корабля будут отличаться в $\cos^3 \alpha$ раз от работы и изменения потенциальной энергии корабля со сдвинутыми частями. Это означает, что потенциальная энергия корабля-гантельки равна $-G \frac{Mm}{R} \cos^3 \alpha$. Потенциальная энергия изменилась так, как если бы мы ничего не делали с кораблем, а изменили поле тяготения, заменив постоянную всемирного тяготения G на $G \cos^3 \alpha$.

А теперь будем каждый раз в перигее раздвигать половинки корабля, а в апогее сдвигать их. Будем еще с помощью специального устройства следить за тем, чтобы в полете от апогея к перигею угол α оставался постоянным — это упростит наши расчеты. Рассмотрим, что будет происходить с орбитой нашего корабля.

Пусть корабль-гантелька движется от перигея к апогею. Обозначим v_1 его скорость в перигее, u_1 — скорость в апогее, r_1 — расстояние до центра планеты в перигее и R_1 — расстояние в апогее. Согласно закону сохранения энергии,

$$-G \frac{Mm}{r_1} \cos^3 \alpha + \frac{mv_1^2}{2} = -G \frac{Mm}{R_1} \cos^3 \alpha + \frac{mu_1^2}{2}.$$

Кроме того, как известно, секториальная скорость корабля остается постоянной. Обозначим ее S . Тогда (см. задачу 42)

$$S = v_1 r_1 = u_1 R_1.$$

Отсюда $r_1 = S/v_1$ и $R_1 = S/u_1$. Подставим эти выражения для r_1 и R_1 в предыдущее равенство и получим

$$v_1^2 - u_1^2 = \frac{2GM}{S} (v_1 - u_1) \cos^3 \alpha,$$

или

$$v_1 + u_1 = \frac{2GM}{S} \cos^3 \alpha.$$

Долетев до апогея, сдвинем обе половинки (переключим гравитационное поле). Проведя расчет, аналогичный тому, который мы

сделали только что для первой половины траектории, найдем

$$u_1 + v_2 = \frac{2GM}{S},$$

где v_2 — новая скорость в перигее. Теперь вычтем из последнего равенства предыдущее и получим

$$v_2 - v_1 = \frac{2GM}{S}(1 - \cos^3 \alpha).$$

В результате наших операций скорость в перигее увеличилась: $v_2 > v_1$. А расстояние? Так как $r_1 = S/v_1$, а $r_2 = S/v_2 = r_1 v_1 / v_2$, то расстояние в перигее уменьшилось. Обозначив величину $\frac{2GM}{S}$ буквой a , получим

$$v_2 = v_1 + a(1 - \cos^3 \alpha), \quad r_2 = r_1 \frac{v_1}{v_2} = r_1 \frac{v_1}{v_1 + a(1 - \cos^3 \alpha)}.$$

Вновь раздвинем половинки корабля и полетим от перигея к апогею. В апогее корабль будет иметь скорость u_2 такую, что

$$v_2 + u_2 = a \cos^3 \alpha = v_1 + u_1,$$

откуда

$$u_2 - u_1 = v_1 - v_2 = a(\cos^3 \alpha - 1).$$

Итак, скорость в апогее через период уменьшилась. А расстояние? Оно, очевидно, увеличилось:

$$R_2 = R_1 \frac{u_1}{u_2} = R_1 \frac{u_1}{u_1 + a(\cos^3 \alpha - 1)} > R_1.$$

Нетрудно заметить, что каждый оборот увеличивает скорость в перигее и уменьшает скорость в апогее на одну и ту же величину $a(1 - \cos^3 \alpha)$. Следовательно, после n периодов обращения корабля вокруг планеты его скорости в перигее и апогее будут равны

$$v_n = v_1 + na(1 - \cos^3 \alpha), \quad u_n = u_1 - na(1 - \cos^3 \alpha),$$

а расстояния —

$$r_n = r_1 \frac{v_1}{v_1 + na(1 - \cos^3 \alpha)}, \quad R_n = R_1 \frac{u_1}{u_1 - na(1 - \cos^3 \alpha)}.$$

При $n \rightarrow u_1 / (a(1 - \cos^3 \alpha))$ величина R_n стремится к ∞ , т.е. корабль уходит от планеты. Так, изменяя периодически параметры

корабля, можно растягивать его орбиту и вообще улететь от планеты в космическое пространство. Правда времени для этого потребуется немало, так как величина $u_1 / \left(a(1 - \cos^3 \alpha) \right)$ велика. Зато проект корабля совсем не плох, если нужно покинуть поле тяготения сверхплотной, т.е. очень тяжелой звезды. В этом случае a велико и n сравнительно малó.

149. Для того чтобы можно было изучить движение ионов, необходимо прежде всего выяснить, какая сила действует на ион в электростатическом поле цилиндрического конденсатора, т.е. выяснить, какова напряженность поля в таком конденсаторе.

Напряженность поля пропорциональна плотности силовых линий. Если через дугу с единичным углом проходит n силовых линий, то через дугу с углом φ проходит $N = n\varphi$ силовых линий. Плотность силовых линий, пересекающих дугу радиусом r , равна отношению N к длине $r\varphi$ дуги, т.е. равна n/r (рис.123). Следовательно, напряженность поля цилиндрического конденсатора пропорциональна r^{-1} :

$$E = \frac{b}{r}.$$

В таком поле на заряд q , находящийся на расстоянии r от оси конденсатора, действует сила, равная

$$F = \frac{bq}{r}.$$

Рис. 123

Эта сила сообщает заряду ускорение a , равное по модулю

$$a = \frac{bq}{rm},$$

где m — масса заряда.

Обозначим x отклонение иона от основной траектории радиусом r_0 . Тогда $r = r_0 + x$, и

$$a = \frac{bq}{m(r_0 + x)}.$$

Рассмотрим движение этого иона в системе отсчета, вращающейся вокруг оси конденсатора. В этой системе ускорение уже не равно a , так как все точки системы тоже движутся с некоторым ускорением относительно неподвижной системы отсчета, связанной с осью конденсатора. Точка, находящаяся на расстоянии $r_0 + x$ от оси, движется с центростремительным ускорением $a_{ц} = \omega^2(r_0 + x)$. Сле-

довательно, во вращающейся системе отсчета ускорение иона равно

$$a_{\text{отн}} = a - a_{\text{ц}} = \frac{bq}{m(r_0 + x)} - \omega^2(r_0 + x).$$

Из закона сохранения момента импульса следует, что

$$m(r_0 + x)^2 \omega = mr_0^2 \omega_0,$$

где ω_0 – угловая скорость иона в точке А. Она же равна и угловой скорости иона, движущегося по основной траектории. Но центростремительное ускорение $a_0 = \omega_0^2 r_0$ иону, движущемуся по основной траектории радиусом r_0 , сообщает сила \vec{F} , равная по модулю bq/r_0 , поэтому

$$\omega_0^2 = \frac{bq}{mr_0^2}.$$

Таким образом,

$$a_{\text{отн}} = \frac{bq}{m(r_0 + x)} - \frac{bq}{mr_0^2} \frac{r_0^4}{(r_0 + x)^4} (r_0 + x) = \frac{bq(2r_0x + x^2)}{m(r_0 + x)^3}.$$

При $x \ll r_0$

$$a_{\text{отн}} = 2 \frac{bq}{mr_0^2} x.$$

Мы видим, что при смещении с траектории «наружу» ($x > 0$) относительное ускорение направлено к центру, и наоборот. Значит, координата тела x удовлетворяет уравнению $mx'' = -kx$, где $k = \frac{2bq}{r_0^2}$.

Такое уравнение описывает гармонические колебания с периодом

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Следовательно, ионы пучка, скорость которых в точке

А составляет малый угол α со скоростью ионов, движущихся по основной траектории, будут совершать относительно основной траектории радиальные гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mr_0^2}{2bq}}.$$

Этот период одинаков для всех ионов. Значит, после того как ионы попадают в конденсатор в точке А, через времена $t_n = n \frac{T}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) все ионы будут оказываться в одной и той же точке основной траектории – будут фокусироваться. Нетрудно найти угол ϕ между

двумя последовательными фокусами:

$$\varphi = \omega_0 \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, если $\angle AOB = \pi/\sqrt{2}$, то ионы будут фокусироваться в точке B.

Найдем теперь максимальную ширину пучка. Для этого воспользуемся тем, что максимальное абсолютное значение скорости v_{\max} тела, совершающего гармонические колебания, и амплитуда x_{\max} его колебаний связаны соотношением

$$v_{\max} = x_{\max} \Omega,$$

где $\Omega = 2\pi/T$ — частота колебаний. В нашем случае v_{\max} равно значению радиальной проекции скорости в точке A (рис. 124):

$$v_{\max} = v \frac{\alpha}{2}$$

(так как α мало, $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$). Поэтому

$$\frac{1}{2} \omega_0 r_0 \alpha = x_{\max} \cdot \frac{2\pi}{T}.$$

Рис. 124

Следовательно, максимальная ширина d пучка равна

$$d = 2x_{\max} = \frac{\omega_0 r_0 \alpha T}{2\pi} = \frac{r_0 \alpha}{\sqrt{2}}.$$

150. При закрывании рукой резонансного ящика звучащего камертона излучаемый им звук модулировался. В результате излучаемая звуковая волна $A \cos \omega t$ превращалась в волну, описываемую формулой

$$A = A_0 \cos \omega t \cdot (1 + B \cos \Omega t),$$

где $\omega = 2\pi\nu$ — частота не модулированной волны и Ω — частота модуляции. Преобразуя, можно записать

$$A = A_0 \cos \omega t + \frac{1}{2} A_0 B \cos((\omega - \Omega)t) + \frac{1}{2} A_0 B \cos(\omega + \Omega)t.$$

Следовательно, модулированная волна представляет собой сумму трех волн с частотами ω , $\omega - \Omega$ и $\omega + \Omega$. Одна из частот $\omega - \Omega$ или $\omega + \Omega$ совпадала с частотой колебаний второго камертона. В результате он возбуждался.

151. Для передачи изображения необходимо прежде всего преобразовать его в электрический сигнал. Это происходит в передаю-

шей телевизионной трубке. Кадр изображения проецируется на светочувствительный мозаичный экран. Каждая из ячеек экрана заряжается, причем тем сильнее, чем больше ее освещенность. Так получается электрическое изображение передаваемого объекта. Затем электронный луч последовательно обегает различные участки этого изображения, двигаясь слева направо (вдоль строки) и сверху вниз (по строкам); электрическое изображение преобразуется в электрический сигнал.

Предположим, мы хотим передать картинку, показанную на рисунке 125. Яркость картинке по горизонтали меняется по синусоидальному закону. Пусть число максимумов яркости равно m ,

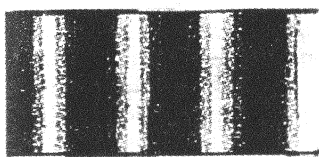


Рис. 125

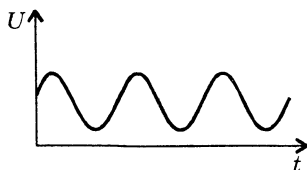


Рис. 126

число строк, на которое разбивается картинка, равно n , а частота смены кадров ν_k . Электрический сигнал, содержащий информацию о картинке, имеет форму, показанную на рисунке 126.

За время передачи одной строки сигнал имеет m максимумов, за время передачи одного кадра — nm максимумов, а за 1 секунду — $nm\nu_k$ максимумов. Значит, циклическая частота сигнала равна

$$\Omega = 2\pi\nu = 2\pi mn\nu_k.$$

Следовательно, частота сигнала Ω пропорциональна частоте смены кадров:

$$\Omega \sim \nu_k.$$

Величина сигнала меняется со временем по синусоидальному закону, который можно записать так:

$$U = U_0 + U_1 \sin \Omega t = U_0(1 + k \sin \Omega t),$$

где $k = U_1/U_0$. Для того чтобы передать этот низкочастотный сигнал на большие расстояния, им модулируют сигнал высокой частоты ω ($\omega \gg \Omega$), величина которого меняется по закону

$$U = U_0 \sin \omega t.$$

В результате модуляции амплитуда высокочастотного сигнала уже не постоянна, а меняется со временем так же, как модулирующий низкочастотный сигнал (рис. 127). Таким образом,

$$U_M = U_0(1 + k \sin \Omega t) \sin \omega t$$

(U_m — величина амплитудно-модулированного сигнала). После несложных тригонометрических преобразований получим

$$U_m = U_0 \sin \omega t + \frac{1}{2} k U_0 \sin((\omega + \Omega)t) + \frac{1}{2} k U_0 \sin((\omega - \Omega)t).$$

Это означает, что в нашем случае амплитудно-модулированный сигнал представляет собой сумму трех синусоидальных сигналов с частотами ω , $\omega + \Omega$ и $\omega - \Omega$. Если же кадр является более сложным, то он передается в интервале частот шириной 2Ω . Чем больше частота смены кадров, тем шире указанный интервал частот. Теле-

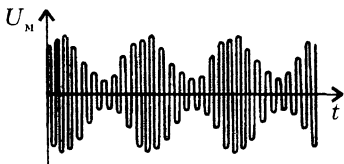


Рис. 127

визионный приемник, следовательно, должен принимать сигналы в некотором диапазоне частот.

Но наряду с сигналом, несущим данную информацию, в эфире всегда существуют всевозможные случайные сигналы, называемые шумами. Шумы имеют различные частоты, и можно считать, что в каждом интервале частот их энергия примерно одинакова. Чем шире полоса частот, воспринимаемая приемником, тем сильнее шумы, или, как говорят, выше уровень шумов. Если основной сигнал слаб, он может забиваться шумами, и мы не сможем его распознать.

На Земле передающие станции обладают достаточной мощностью, и уровень сигнала намного выше уровня шумов. Поэтому частота ν_k , а значит и частота смены кадров, может быть достаточно большой (что действительно необходимо для осуществления нормального зрительного восприятия телепередачи).

Иное дело в космосе. Мощности передатчиков на космических кораблях малы, уровень основного сигнала низок. Увеличивая же время передачи одного кадра, т.е. сужая полосу частот, можно существенно уменьшить уровень шумов, что поможет выделить сигнал, несущий информацию.

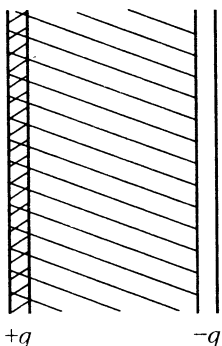


Рис. 128

152. Грубо можно представить, что в электрическом поле электронные орбиты смещаются на некоторое расстояние Δx от ядра и происходит поляризация атомов диэлектрика.

Рассмотрим себе некоторый объем диэлектрика (рис.128). Смещение электрических зарядов на величину Δx приводит к появлению на торцах этого объема зарядов q и $-q$:

$$q = 2eN\Delta xS,$$

где $2e$ – заряд ядра, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, N – число атомов гелия в единице объема и S – площадь торца диэлектрика. Число N легко найти, зная молярную массу гелия $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль и плотность гелия ρ :

$$N = \frac{\rho}{M} N_A \approx 2 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$$

($N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$ – постоянная Авогадро). Внутри же объема заряд остается скомпенсированным. Следовательно, ослабление поля в диэлектрике в ϵ раз связано как раз с полем, созданным зарядами $+q$ и $-q$, причем напряженность \vec{E} поля в диэлектрике равна

$$E = E_0 - \Delta E,$$

где E_0 – внешнее поле и ΔE – поле зарядов на торцах. Поле зарядов можно рассматривать как поле плоского конденсатора, так что

$$\Delta E = \frac{q}{\epsilon_0 S} = \frac{2eN\Delta x}{\epsilon_0}.$$

Кроме того, как известно, $E = \frac{E_0}{\epsilon}$, так что $E_0 = \epsilon E$. Поэтому

$$E = \epsilon E - \frac{2eN\Delta x}{\epsilon_0}.$$

Нам осталось найти Δx .

На электрон в электрическом поле напряженностью E действует сила $F = eE$. Если принять модель, в которой электрон как бы связан с ядром пружиной жесткостью k , то удлинение Δx этой пружинки равно

$$\Delta x = \frac{F}{k} = \frac{eE}{k}.$$

Найдем теперь k . Гелий сильно поглощает излучение с длиной волны $\lambda = 0,06$ мкм, или частотой $\omega = 2\pi c/\lambda$ (c – скорость света). Это – резонансная частота колебаний электрона. Следовательно, $\omega = \sqrt{k/m}$, где m – масса электрона. Поэтому можно записать

$$2\pi \frac{c}{\lambda} = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Отсюда

$$k = 4\pi^2 \frac{c^2 m}{\lambda^2} \approx 9 \cdot 10^2 \text{ кг/с}^2.$$

Теперь из выражений для Δx и E получим

$$\varepsilon = 1 + \frac{2e^2 N}{k\varepsilon_0} \approx 1,05.$$

153. Из каждой точки траектории пули распространяется сферическая звуковая волна. Эти волны, складываясь, дают картину, которая существенно зависит от соотношения между скоростью пули и скоростью звука. Если скорость звука больше скорости пули, то

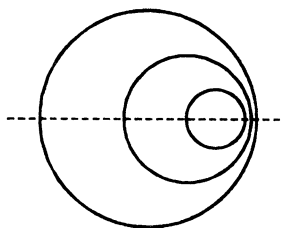
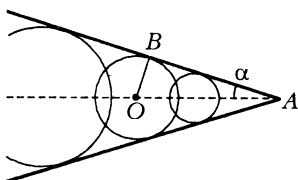


Рис. 129

волны, которые излучаются в различных точках, никогда не смогут догнать друг друга (рис.129). Если же скорость пули больше скорости звука, то фронты волн будут пересекаться, как показано на рисунке 130, и, складываясь, эти волны будут образовывать «усы», расходящиеся от пули, аналогичные «усам», идущим от носа глиссера. Эти «усы» представляют собой огибающие фронтов сферических звуковых волн. Подобная картина представлена на фотографии. Следовательно, пуля двигалась со скоростью v , большей скорости звука c .

Угол между «усами» простым образом связан с отношением скоростей пули и звука. Так как за время t пуля пролетает расстояние $OA = vt$ (см. рис.130), а звук из точки O проходит расстояние $OB = ct$, то



$$\sin \alpha = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v}.$$

В нашем случае $\alpha \approx 45^\circ$, и поэтому

Рис. 130

$$v \approx 480 \text{ м/с}.$$

Картина волн, идущих от носа корабля, похожа на рисунок 43. Однако здесь она сложнее. Это связано с тем, что скорость распространения коротких волн (длина которых мала по сравнению с глубиной водоема) зависит от длины волны λ . Для таких волн $v \sim \sqrt{g\lambda}$. Так как при движении корабля возбуждается целый набор волн с различными λ , то образуется группа волн. Групповая скорость, как мы видели при решении задачи 2, не совпадает со скоростью отдельных волн и равна $v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$. В нашем случае получим $v_g = \frac{1}{2}v$. Поэтому к тому моменту, когда корабль переместится из точки A в точку B (рис.131), фронт группы волн, возбужденных в точке A , переместится не в

точку C , а только на половину расстояния AC . Из-за этого за кораблем распространяется большое число волн, идущих ступеньками по линии BK . Сами ступеньки параллельны линии BC .

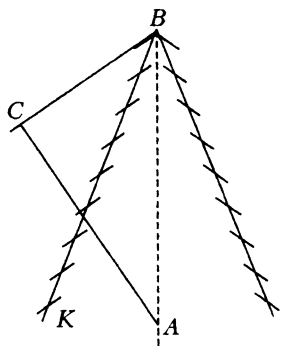


Рис. 131

154. Из-за изменения скорости звука с глубиной звуковые лучи изгибаются, как показано на рисунке 132, и перед кораблем образуется «мертвая зона», в которую звук вообще не попадает. Граница мертвой зоны — это траектория луча, идущего вначале параллельно поверхности океана. Нижний край волнового фронта шириной Δh , перпендикулярного этому лучу, за время Δt проходит на $\Delta c \Delta t$ меньшее расстояние, чем верхний край (рис. 133). Благодаря этому фронт

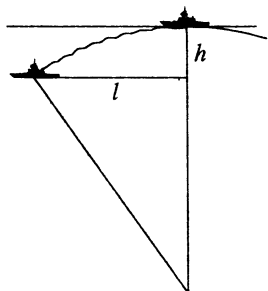


Рис. 132

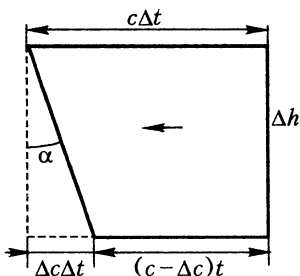


Рис. 133

волны за время Δt поворачивается на малый угол α такой, что

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta c \Delta t}{\Delta h}.$$

Скорость ω поворота волнового фронта равна

$$\omega = \frac{\alpha}{\Delta t} = \frac{\Delta c}{\Delta h} = 0,04 \text{ с}^{-1}.$$

С такой же скоростью поворачивается и вектор скорости звукового фронта, который перпендикулярен этому фронту. И так как изменение абсолютного значения скорости звука мало по сравнению с самой скоростью, то можно считать, что фронт волны движется по окружности радиусом $R = c/\omega = 1500/0,4 \text{ м} = 37,5 \text{ км}$. Поскольку $R \gg h$, можно считать, что радиус R остается постоянным вдоль всей траектории луча. В этом случае, как видно из рисунка 132,

$$l = \sqrt{R^2 - (R - h)^2} \approx \sqrt{2Rh_0} \approx 6,1 \text{ км}.$$

На таком же расстоянии и гидроакустик на корабле сможет услышать шум лодки, так как звуковые волны, идущие от лодки, тоже загибаются и при расстояниях больше l не попадают на поверхность.

В океанах имеются участки, в которых скорость звука до некоторой глубины уменьшается с глубиной, а затем увеличивается. В таких участках звуковые лучи загибаются так, что звук распространяется в узкой области, в которой скорость звука минимальна. Образуется узкий звуковой канал, в которой звук низкой частоты, слабо затухающий в морской воде, может распространяться на тысячи километров.

Скорость звука в воздухе тоже зависит от высоты из-за изменения температуры и плотности воздуха, а также из-за зависимости скорости ветра от высоты. Поэтому в атмосфере возникают те же эффекты загибания звуковых волн, что и в воде. Теперь понятны и физические основы народной поговорки «не кричи против ветра». Если скорость ветра, как это обычно бывает в нижних слоях атмосферы, увеличивается с высотой, то звуковые волны, распространяясь против ветра, загибаются вверх и на некотором расстоянии от «крикуна» образуется мертвая зона, в которой звук вообще не слышен.

155. Он увидит, что на изображение закрытого глаза наклеена бумажка.

156. Под наибольшим углом к поверхности воды луч света падает в точке A струи (рис. 134). Угол падения α , при котором луч в этой точке не испытывает полного внутреннего отражения, должен быть таким, что

$$\sin \alpha = \frac{1}{n}.$$

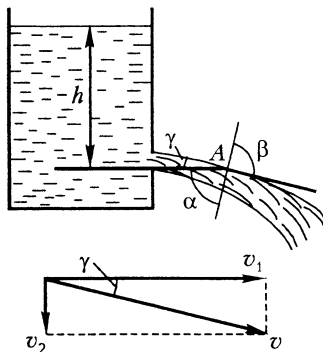


Рис. 134

Касательная к струе в точке A составляет угол $\gamma = 90^\circ - \alpha$ с горизонталью. Таким образом, луч света выйдет из струи, ни разу не испытывая внутреннего отражения, если угол, который образует касательная к струе в точке A , составляет с горизонтом угол γ такой, что $\cos \gamma = 1/n$. Но касательная к поверхности жидкости — это траектория движения

частиц жидкости, вышедших из сосуда у верхнего края отверстия. Поэтому направление касательной к поверхности жидкости совпадает с направлением вектора скорости частиц жидкости в точке A . Эта скорость складывается из горизонтальной скорости v_1 , которую

имели частицы воды у отверстия сосуда, и из скорости v_2 , приобретенной ими при свободном падении с высоты $2r$. Из закона сохранения энергии следует, что $\Delta m g \cdot 2r = \frac{\Delta m v_2^2}{2}$ (Δm — масса частицы воды), поэтому $v_2 = \sqrt{4gr}$. Что же касается скорости v_1 вытекания жидкости из сосуда, то, как известно, она равна $\sqrt{2gh}$, где h — высота уровня воды над отверстием. Это следует, например, из закона сохранения энергии. Действительно, при вытекании массы воды Δm из сосуда с жидкостью потенциальная энергия воды уменьшается на величину $\Delta m g h$ (можно просто считать, что масса воды Δm переместилась с поверхности жидкости к отверстию).

Зная v_1 и v_2 , нетрудно найти угол наклона касательной к поверхности жидкости в точке A к горизонту:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{2 \frac{r}{h}}.$$

Выражая теперь $\cos \gamma$ через $\operatorname{tg} \gamma$ и подставляя это выражение в формулу для n , получим

$$n = \sqrt{1 + \frac{2r}{h}}, \text{ или } h = \frac{2r}{n^2 - 1}.$$

157. При небольшом ветре на поверхности водоема образуется рябь, которую можно представить как множество мелких волн, разбросанных по поверхности воды абсолютно неправильно и возникающих одинаково часто во всех направлениях. Крутизна склона волн при этом не превышает некоторого предельного значения α , которое зависит от силы ветра и может достигать $20 - 30^\circ$.

Для простоты будем считать, что наблюдатель и источник света находятся на одном уровне над поверхностью воды (рис.135). Маленькое горизонтальное зеркальце будет отбрасывать свет в глаз наблюдателя O только в том случае, когда расстояния от него до наблюдателя и до источника одинаковы (точка M). Если же зеркало наклонено под углом α в сторону наблюдателя, то для того чтобы отраженный свет попадал в глаза, оно должно быть несколько сдвинуто от наблюдателя (точка N). Зеркальце, наклоненное под углом α в противополож-

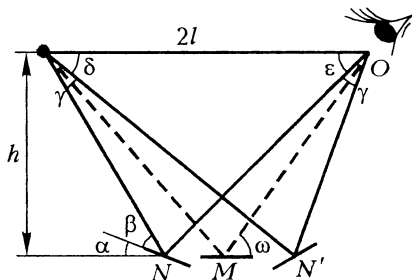


Рис. 135

ную сторону, должно находиться в точке N' . Наклоненные положения зеркала аналогичны крайним положениям волн, при которых отраженный от них свет еще попадает в наш глаз. Расстояние между N и N' поэтому определяет длину световой дорожки. Во всех точках между N и N' найдутся участки волн, имеющие достаточный наклон для того, чтобы отражать лучи в наш глаз.

Рассмотрим теперь углы между лучами света. Из чертежа видно, что $\beta + \alpha = \gamma + \delta$, $\beta - \alpha = \epsilon = \delta$, откуда $\gamma = \alpha + \beta - (\beta - \alpha) = 2\alpha$. Таким образом, мы приходим к выводу, что угол, под которым мы видим большую ось светового пятна, просто равен углу между двумя наиболее крутыми склонами.

Короткая ось пятна отраженного света легко находится аналогичным способом. Если сместить зеркальце из точки M в направлении, перпендикулярном NN' , то, для того чтобы отраженный свет попал в глаз наблюдателя, зеркальце надо повернуть на некоторый угол вокруг оси, параллельной NN' (рис.136). Считая, что предельный угол поворота зеркальца по-прежнему равен α , находим, что ширина полосы света $PP' = 2h \operatorname{tg} \alpha$ и, следовательно, короткая ось стягивает угол

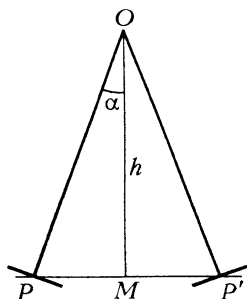


Рис. 136

$$\beta = \frac{2h \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{l^2 + h^2}}.$$

Отношение двух видимых полуосей пятна будет равно $\beta/(2\alpha)$, или, считая, что пятно невелико и угол α мал, равно $\sin \omega$, где ω — угол, под которым мы смотрим на воду. Чем меньше этот угол, тем более вытянуто пятно. Если взгляд скользит по поверхности, то пятно света будет до бесконечности вытягиваться и суживаться.

158. Шероховатая поверхность стекла рассеивает падающий на нее свет равномерно во все стороны. Если стекло лежит на чертеже гладкой поверхностью, то в каждую точку шероховатой поверхности стекла попадают лучи, идущие как от линий чертежа, так и от чистых мест. Световые потоки, идущие из таких разных участков чертежа, затем рассеиваются во все стороны одинаково, и от каждого участка в глаз попадают лучи, идущие как от линий чертежа, так и от чистых мест. Разные участки стекла поэтому кажутся одинаково яркими, и разобрать чертеж нельзя.

Если же стекло обращено к чертежу матовой поверхностью, то матовая поверхность оказывается освещенной неравномерно. Лучи, идущие из разных точек этой поверхности, попадают в глаз не пересекаясь, и чертеж легко разобрать.

159. Рассмотрим слой воздуха с дымом на пути светового пучка. Выберем ширину слоя Δl настолько малой, чтобы в пределах этого слоя практически не было затемнения одних частиц другими. Такой слой поглотит долю света, определяемую поперечным сечением ΔS всех частиц, находящихся в этом слое. В расчете на единицу поперечного сечения пучка получим

$$\Delta S = N \Delta l \pi r^2 = \frac{m}{(4/3)\pi r^3 \rho} \Delta l \pi r^2 = \frac{3m\Delta l}{4r\rho},$$

где N — число частиц в единице объема, ρ — плотность распыленного вещества.

Запишем полученное соотношение для двух рассматриваемых случаев и найдем отношение толщин слоев, в которых поглощается одинаковая доля света:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{m_2}{m_1} \frac{r_1}{r_2}.$$

Аналогичные соотношения можно записать для двух, трех, ... слоев, в пределах которых вновь можно пренебречь взаимным затемнением частиц. Если в первом случае дальность видимости связана с выбранным Δl соотношением $l_1 = n \Delta l_1$, то и во втором случае, очевидно, $l_2 = n \Delta l_2$. Тогда можно записать

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{n \Delta l_1}{n \Delta l_2} = \frac{m_2}{m_1} \frac{r_1}{r_2}.$$

Отсюда

$$m_2 = m_1 \frac{r_2}{r_1} \frac{l_1}{l_2} = 0,2 \text{ г.}$$

160. Рассмотрим, например, точку 3. Лучи, выходящие из точки B , попасть в нее не могут (рис.137). Из рисунка ясно, что видна будет только часть AC предмета AB . Аналогично определяются области, которые видны из точек 1 и 2 (впрочем, из точки 2 виден весь предмет).

161. Нарисуем ход луча от бесконечно удаленного источника через глаз (рис.138). Этот луч испытывает два преломления на двух

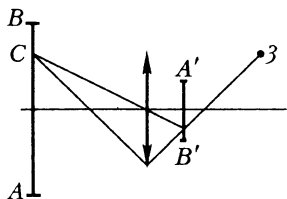


Рис. 137

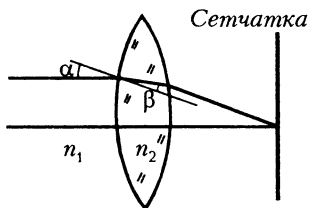


Рис. 138

поверхностях хрусталика. Согласно закону преломления,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1},$$

где n_1 – абсолютный показатель преломления первой среды (воды или воздуха), n_2 – абсолютный показатель преломления вещества хрусталика. Из этой формулы видно, что при уменьшении n_1 (замене воды на воздух) угол β уменьшается. Это означает, что после преломления на входной поверхности хрусталика в том случае, когда перед глазом воздух, лучи идут ниже, чем в том случае, когда перед глазом вода. Поэтому если в воде изображение удаленного предмета при ненапряженном глазе образуется на сетчатке, то в воздухе изображение этого предмета при ненапряженном глазе будет получаться перед сетчаткой. Следовательно, человек близорук.

162. Центр линзы лежит в точке пересечения прямых AA' и BB' , плоскость линзы проходит через точку пересечения продолжения прямых AB и $A'B'$ (рис.139, а и б).

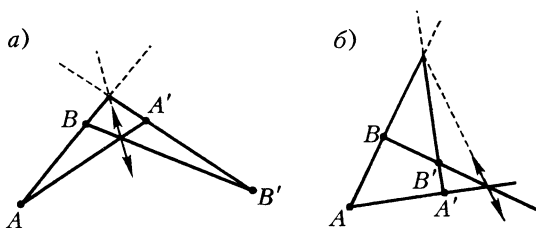


Рис. 139

163. Остановимся на двух наиболее существенных факторах.

Во-первых, лицо человека в маске освещено гораздо хуже, чем сама маска и окружающие предметы. Поэтому свет, отраженный лицом, очень слаб по сравнению со светом, идущим от маски и других предметов. Вот почему для наблюдателя из публики лицо фехтовальщика в маске практически неразличимо. Сам же спортсмен, наоборот, хорошо видит ярко освещенные предметы вокруг себя на фоне слабого света, отраженного внутренней стороной проволочной маски. К тому же, изображение маски в глазу спортсмена получается сильно размытым (несфокусированным), так как маска расположена слишком близко к глазу.

Аналогично объясняется, почему днем невооруженным глазом нельзя увидеть звезд: солнечный свет, рассеянный атмосферой, гораздо сильнее света звезд.

Во-вторых, поскольку проволочная сетка находится близко от лица спортсмена, она закрывает для наблюдателя довольно

большую часть лица. В то же время спортсмену эта маска не мешает.

В заключение рассмотрим еще одну подобную задачу: почему днем с улицы ничего не видно внутри комнаты, если смотреть через окно, занавешенное сетчатой тканью? Очевидно, в этом случае тот факт, что сильно освещенная снаружи занавеска отражает много света по сравнению с предметами внутри комнаты, играет решающую роль. Если смотреть из комнаты на улицу, то яркие предметы будут хорошо видны, так как внутренняя сторона занавески освещена слабо. Однако видно будет значительно хуже, если в комнату попадают прямые солнечные лучи и стены комнаты хорошо отражают свет, — тогда и изнутри занавеска освещена хорошо. Чтобы хорошо видеть то, что происходит на улице, необходимо в этом случае подойти вплотную к окну.

Вечером, наоборот, очень хорошо видна с улицы освещенная комната, но совсем не видна улица из комнаты.

164. Резкое изображение предмета, которое дает хрусталик несовершенного глаза, получается не на сетчатке глаза, а перед ней, если человек близорук, или за ней, если человек дальновзорок. В обоих случаях изображение каждой точки на сетчатке глаза получается в виде расплывчатого пятна (рис. 140), диаметр которого зависит от диаметра зрачка и от степени близорукости (или дальновзорокости) человека. Чем меньше диаметр зрачка, тем уже пучок лучей, создающих изображение точки, тем меньшее пятно получается на сетчатке. При ярком освещении диаметр зрачка уменьшается, и изображение букв для людей, носящих не очень сильные очки, оказывается размытым слабо. Поэтому они могут читать и без очков. Для тех же, кто пользуется сильными очками, изображение букв получается далеко от сетчатки глаза, и, несмотря на небольшой диаметр зрачка, изображение букв оказывается сильно размытым, так что читать текст все равно невозможно.

Аналогично объясняется увеличение глубины резкости (т.е. области, которая получается резкой на фотопленке) при уменьшении диаметра отверстия объектива. Действительно, пусть мы хотим одновременно сфотографировать две точки *A* и *B*, находящиеся на некотором расстоянии друг от друга (рис. 141). Если аппарат сфокусирован на какой-то предмет между этими точками (объектив дает на фотопленке резкое изображение этого предме-

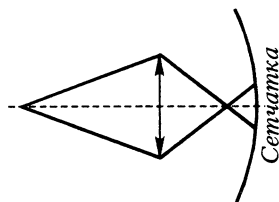


Рис. 140

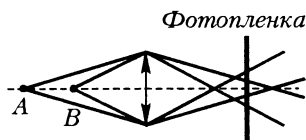


Рис. 141

та), то изображение точек на фотопленке получается расплывчатым, но диаметр каждого из пятен – изображений точек – зависит от диаметра отверстия объектива, уменьшаясь при уменьшении этого диаметра. Допустимое размытие определяет глубину резкости – те расстояния, на которых изображения на пленке считаются резкими.

Простой расчет для диаметра d размытого изображения точки, смещенной на расстояние x из положения, при котором ее изображение получается резко, дает

$$d \approx D \frac{F}{(a - F)a} |x|,$$

где F – фокусное расстояние объектива, D – диаметр отверстия диафрагмы и a – расстояние от предмета до диафрагмированного объектива, при котором изображение резкое. Если, как обычно бывает, $a \gg F$, то

$$d \approx D \frac{F}{a^2} |x|.$$

Отсюда можно найти глубину резкости при допустимом размытии изображения:

$$|x| \approx \frac{d}{D} \frac{a^2}{F}.$$

Глубина резкости оказывается обратно пропорциональной диаметру диафрагмы.

При маленьких диаметрах диафрагмы глубина резкости велика. Однако при этом начинают играть роль дифракционные явления. Из-за дифракции на диафрагме пучок не сходится в точку, а его изображение образует систему светлых и темных колец. Основная доля энергии попадает в небольшой центральный максимум, соответствующий дифракционной угловой расходимости пучка порядка λ/D , где λ – длина волны света. Дифракционное размытие в фокальной плоскости объектива должно быть порядка $\Delta \sim \frac{\lambda F}{D}$. Для видимого света с длиной волны $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-7}$ м и для объектива с фокусным расстоянием $F = 5$ см дифракционное размытие $\Delta \sim 0,1$ мм получается при диаметре диафрагмы $D \sim 0,3$ мм. Таких маленьких отверстий диафрагмы не бывает в обычных объективах, и дифракционное размытие пучка для них несущественно. Тем не менее, оно представляет важную характеристику объектива, так как определяет возможное предельное разрешение объектива – расстояние между двумя точками, изображения которых можно увидеть раздельно.

Очевидно, что две точки можно будет увидеть раздельно, или, как говорят, разрешить, если центры дифракционных изображений

этих точек отстоят друг от друга на расстояние порядка радиуса их дифракционных изображений (критерий Рэлея). Следовательно, две точки разрешимы, если угловое расстояние между ними (угол, под которым они видны) порядка углового дифракционного уширения пучка:

$$\varphi \sim \frac{\lambda}{D}.$$

Например, для глаза с диаметром зрачка $D = 4$ мм при наблюдении в свете с длиной волны $\lambda \sim 5,5 \cdot 10^{-7}$ м

$$\varphi \sim 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

Для телескопа с диаметром линзы 2 м получим $\varphi \sim 6 \cdot 10^{-6}$ рад. Чем больше диаметр объектива телескопа, тем лучше его разрешение. Вот почему астрономы стремятся получить в свое распоряжение телескопы с возможно большим диаметром объектива.

Но вернемся к маленьким отверстиям диафрагмы. Мы ранее пришли к выводу, что чем меньше отверстие диафрагмы, тем больше глубина резкости. При $D \rightarrow 0$ глубина резкости стремится к ∞ . При очень маленьких отверстиях диафрагмы можно выбросить линзу и устроить «дырочную» камеру – камеру-обскуру. Если такой фотокамерой фотографировать отдаленный предмет, находящийся на расстоянии много больше размера камеры, то можно считать, что из каждой точки предмета в объектив попадает параллельный пучок лучей. Такой пучок будет давать на пленке пятно, диаметр которого равен диаметру отверстия, а глубина резкости такого объектива бесконечна. При уменьшении диаметра отверстия качество изображения будет улучшаться. Это, однако, справедливо лишь до тех пор, пока диаметр D отверстия таков, что дифракционное уширение пучка мало по сравнению с диаметром отверстия. Так как дифракционное уширение пучка растет с уменьшением D , то при уменьшении диаметра отверстия качество изображения вначале улучшается, а затем начинает ухудшаться. Наилучшее изображение получается тогда, когда дифракционное уширение оказывается порядка диаметра отверстия:

$$\frac{\lambda F}{D} \sim D.$$

Отсюда найдем, что для этого диаметр отверстия должен быть порядка $\sqrt{\lambda F}$. Например, для $\lambda \sim 6 \cdot 10^{-7}$ м и $F \sim 10$ см получим, что диаметр отверстия должен быть порядка 0,34 мм.

165. Прозрачные окна отражают меньше света, чем стены домов.

166. Когда рыба рассматривается с моста, лучи от нее, идущие в глаз, падают на поверхность воды под малым углом, и поэтому их отражение от поверхности невелико по сравнению с тем случаем, когда рыба рассматривается с невысокого берега.

Кроме этих лучей в глаз попадают лучи от Солнца, которые создают общий слепящий фон. Если наблюдатель стоит на мосту, в его глаза попадают солнечные лучи, падающие под меньшим углом, чем в том случае, когда он стоит на берегу. Поэтому эти лучи меньше отражаются от поверхности воды, и фон в этом случае менее яркий.

167. Освещенность изображения E равна отношению светового потока Φ , проходящего через линзу, к площади изображения S . Отношение освещенностей для рассматриваемых двух случаев можно записать так:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \frac{S_1}{S_2}.$$

Освещенность поверхностей линз в обоих случаях одна и та же. Поэтому отношение световых потоков равно отношению площадей линз – целой и разрезанной пополам. Это значит, что $\Phi_2/\Phi_1 = 1/2$. Теперь найдем отношение площадей изображения.

Изображение Солнца лежит в фокальной плоскости линзы. Обозначим фокусное расстояние линзы F , а угол, под которым видно Солнце с Земли, α . Так как Солнце находится очень далеко от Земли, можно считать, что из каждой точки Солнца на линзу падает параллельный пучок лучей, собирающихся в фокальной плоскости линзы. Поэтому угол α – это угол между пучками лучей, идущих от крайних точек Солнца. Из рисунка 142 видно, что радиус изображения Солнца равен

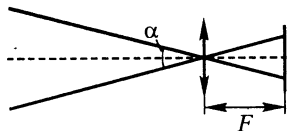


Рис. 142

$$r = F \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Но так как угол α мал ($\alpha \approx 30'$), то

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}, \text{ и } r = \frac{F\alpha}{2}.$$

Для того чтобы найти размер изображения во втором случае, нужно знать фокусное расстояние составной линзы. Заметим, что оптическая сила двух сложенных вплотную тонких линз равна сумме их оптических сил. Действительно, луч, вышедший из фокуса первой линзы, становится, после того как он пройдет эту линзу, параллельным главной оптической оси системы и после прохождения второй линзы попадет в ее фокус. Обозначив фокусное расстояние сложной линзы F' , мы можем, согласно формуле линзы, написать

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}.$$

Но отсюда следует, что фокусное расстояние линзы, составленной из двух половинок плосковыпуклой линзы, вдвое меньше фокусного расстояния целой линзы. Благодаря этому радиус изображения Солнца во втором случае будет вдвое меньше, чем в первом, а площадь изображения – в четыре раза меньше, т.е. $S_1/S_2 = 4$.

Таким образом, $E_2/E_1 = 2$, т.е. освещенность изображения Солнца увеличится в два раза.

168. Размер солнечного зайчика определяется пучками лучей, идущими от диаметрально противоположных точек Солнца. Так как угол между этими пучками равен угловому диаметру Солнца $\alpha \approx 30'$ (углу, в котором видно Солнце с Земли), то диаметр пятна равен примерно $d + L\alpha$, где d – диаметр зеркала, L – расстояние от зеркала до стенки. Распределение освещенности в этом пятне неравномерно, однако для оценки пренебрежем этим обстоятельством и будем считать, что Солнце находится в зените. Тогда плоскость зеркальца должна составлять угол 45° с направлением на Солнце, и освещенность зеркальца равна $E_0 \cos 45^\circ = E_0/\sqrt{2}$, где E_0 – освещенность прямыми солнечными лучами. Световой поток Φ_0 , попадающий на зеркальце, равен $\frac{E_0}{\sqrt{2}} \frac{\pi d^2}{4}$. Пренебрежем поглощением и рассеянием этого потока. Тогда, разделив Φ на площадь зайчика $S = \frac{1}{4} \pi (d + L\alpha)^2$, найдем его среднюю освещенность:

$$E = \frac{\Phi_0}{S} = E_0 \frac{d^2}{\sqrt{2}(d + L\alpha)^2}.$$

Теперь можно найти освещенность точек корабля, в которые посылают зайчики n горожан. Она равна nE и должна быть примерно такой же, как освещенность E_1 , которую получают в фокальной плоскости линзы при выжигании. Диаметр изображения Солнца в фокальной плоскости линзы равен $F\alpha$ (см. задачу 167), а световой поток, собираемый линзой, равен $E_0 \cdot \pi D^2/4$. Поэтому

$$E_1 = \frac{E_0 \pi D^2/4}{(F\alpha)^2/4} = E_0 \frac{D^2}{F^2 \alpha^2}.$$

Так как $D/F \geq 0,07$, то корабль можно было поджечь, если

$$nE \geq 4,9 \cdot 10^{-3} \frac{E_0}{\alpha^2},$$

т.е. если $n \geq 392$. Столько горожан нужно было Архимеду для того, чтобы расправиться с римским флотом.

169. Матовый колпак равномерно рассеивает свет от лампы. Поэтому, хотя яркость нити накаливания лампочки очень велика,

яркость матового колпака (т.е. световой поток, излучаемый с единицы поверхности колпака) мала. Сравнительно невелика и яркость изображения колпака на сетчатке глаза.

170. Так как расстояния от Солнца до Земли и Луны велики по сравнению с диаметром Солнца, при расчетах мы можем считать, что Солнце – это точечный источник света, равномерно излучающий световую энергию во все пространство. Примем, что сила света этого источника, т.е. энергия, излучаемая Солнцем в единичный телесный угол за 1 секунду, равна I . Тогда освещенность поверхности Земли в яркий солнечный день будет равна

$$E_C = \frac{I}{L^2},$$

где L – расстояние от Солнца до Земли.

Луна освещает Землю отраженным солнечным светом. Так как расстояние от Солнца до Луны можно принять равным расстоянию от Солнца до Земли, то освещенность поверхности Луны в полнолуние тоже равна I/L^2 . На всю поверхность Луны радиусом r попадает световая энергия

$$W = E_C \cdot \pi r^2.$$

Так как энергия αW рассеивается затем равномерно по всем направлениям по полусфере, то в единичный телесный угол излучается энергия

$$I_L = \alpha \frac{E_C \pi r^2}{2\pi}$$

(полный телесный угол равен 4π). Теперь легко найти освещенность поверхности Земли в полнолуние. Считая Луну точечным источником с силой света I_L , получим

$$E_L = \alpha \frac{E_C r^2}{2l^2},$$

где l – расстояние от Луны до Земли.

Отношение освещенностей Земли в полнолуние и в солнечный день равно

$$\frac{E_L}{E_C} = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{r}{l} \right)^2 = \frac{1}{80000}.$$

Интересно, что около 300 лет назад аналогичный расчет позволил Ньютону правильно оценить расстояние до ближайших ярких звезд.

171. Площадь изображения фонаря, даваемого хрусталиком, обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника, но и световой поток, падающий на зрачок, тоже обратно пропорционален квадрату расстояния до источника, поэтому освещенность изображения не зависит от расстояния до фонаря. Убедимся в этом.

Обозначим I энергию, излучаемую фонарем в единицу телесного угла (яркость фонаря), L – расстояние до фонаря и d_0 – диаметр зрачка. Освещенность поверхности хрусталика равна

$$E_0 = \frac{I}{L^2},$$

а световой поток, попадающий на его поверхность, равен

$$\Phi = \frac{E_0 \pi d_0^2}{4} = \frac{\pi I d_0^2}{4 L^2}.$$

Так как расстояние до фонаря много больше фокусного расстояния F глаза, геометрическое изображение фонаря получается в фокальной плоскости и его диаметр равен $d = FD/L$, где D – диаметр фонаря (рис. 143). Площадь изображения равна поэтому $S = \frac{\pi D^2 F^2}{4 L^2}$, а его освещенность

$$E = \frac{\Phi}{S} = I \frac{d_0^2}{D^2 F^2}.$$

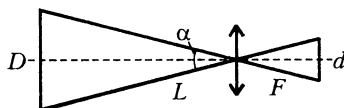


Рис. 143

Мы видим, что освещенность не зависит от L . Отсюда следует любопытный результат. Заменяв в наших рассуждениях фонарь на звезду, а хрусталик на линзу, мы найдем, что освещенность изображения звезды, которое получается с помощью линзы, не зависит от расстояния до звезды. В то же время, сфокусировав солнечные лучи, можно зажечь дерево, а сделать это со светом, идущим от звезды, конечно, не удастся, хотя имеются звезды с диаметром, не большим диаметра Солнца, и излучающие не меньше энергии, чем Солнце. В чем же здесь дело?

Мы предположили, что диаметр изображения определяется геометрическим изображением звезды. В действительности же это изображение дифракционное, его угловой размер λ/d , а диаметр $d' = \lambda F/d$, где λ – длина волны. Этот диаметр много больше геометрического диаметра $d = \frac{D}{L} F$:

$$\frac{d'}{d} = \frac{\lambda L}{d D} \gg 1.$$

Именно поэтому освещенность изображения очень мала. Так, при

$d = 2 \text{ см}$ $\lambda/D = 2,25 \cdot 10^{-5}$ рад. Угловой диаметр Солнца равен $4,7 \cdot 10^{-3}$ рад, а при «удалении» Солнца до ближайшей звезды на расстояние $L \approx 4 \cdot 10^{13} \text{ км}$ он станет равным $1,75 \cdot 10^{-8}$ рад. Тогда $d'/d \sim 1,3 \cdot 10^3$. Следовательно, освещенность изображения звезды таких же параметров, как и Солнце, в $1,7 \cdot 10^6$ раз меньше, чем освещенность изображения Солнца.

172. Так как внутренняя поверхность сферы света не поглощает, то рано или поздно установится равновесие между попадающей в сферу световой энергией и выходящей из нее, т.е. сфера будет являться идеальным отражателем света. Каждый элемент полости сферы должен излучать на всю сферу столько же световой энергии, сколько и получает. Но поток энергии, излучаемой всей сферой на отверстие, равен падающему потоку. Отсюда следует, что освещенность всех точек полости сферы будет такой же, какой была бы освещенность плоского экрана, установленного у отверстия в сфере. Область же, диаметрально противоположная отверстию, облучается двумя путями: первичным пучком и всей сферой. Оба потока при равновесии равны, следовательно, эта область будет в два раза сильнее освещена, чем все другие точки сферы.

173. Обозначим B световой поток, отражаемый единицей площади поверхности жука внутри единичного телесного угла (поверхностная яркость). Тогда с площади S_0 (рис.144) на объектив фотоаппарата падает световой поток

$$\Phi = BS_0\Omega = BS_0 \frac{S_d}{d^2}.$$

Здесь $\Omega = \frac{S_d}{d^2}$ – телесный угол (на самом деле это равенство не точное, а приближенное), S_d – площадь диафрагмы объектива (D_d – ее диаметр), d – расстояние от фотоаппарата до жука.

После объектива световой поток попадает на фотопленку, создавая на ней изображение. Освещенность этого изображения равна

$$E = \frac{\Phi}{S} = \frac{BS_0 S_d}{d^2 S},$$

где S – площадь изображения выделенного участка поверхности жука. Найдем ее. Поскольку линейное увеличение линзы равно f/d (f – расстояние от линзы до изображения), отношение площадей изображения и предмета равно

$$\frac{S}{S_0} = \left(\frac{f}{d}\right)^2.$$

Согласно формуле линзы,

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

откуда

$$f = \frac{Fd}{d - F}, \text{ и } \frac{f}{d} = \frac{F}{d - F}.$$

Следовательно, освещенность изображения равна

$$E = \frac{BS_{\text{д}}}{d^2} \frac{S_0}{S} = \frac{BS_{\text{д}}(d - F)^2}{d^2 F^2}.$$

По условию задачи, при фотографировании жука в двух масштабах освещенность изображения должна быть одной и той же:

$$\frac{BS_{\text{д1}}(d_1 - F)^2}{d_1^2 F^2} = \frac{BS_{\text{д2}}(d_2 - F)^2}{d_2^2 F^2}.$$

Отсюда

$$\frac{S_{\text{д2}}}{S_{\text{д1}}} = \frac{(d_1 - F)^2 d_2^2}{(d_2 - F)^2 d_1^2} = \frac{25}{36}, \text{ и } \frac{D_{\text{д2}}}{D_{\text{д1}}} = \frac{5}{6}.$$

174. Глаз оценивает яркость объектов по освещенности их изображения на сетчатке. Чем более яркий источник, тем больше освещенность его изображения. Мерой контрастности изображения звезды на фоне неба может служить отношение освещенностей их изображений на сетчатке глаза, т.е. $E_{\text{зв.1}}/E_{\text{ф.1}}$.

Рассмотрим сначала картину, которая образуется на сетчатке невооруженного глаза. Пусть d — диаметр зрачка, F — фокусное расстояние глазной оптики. Освещенность находится как отношение светового потока к площади изображения. При этом нужно иметь в виду, что изображение звезды (точечного источника) имеет вид дифракционного пятна. Его диаметр в фокальной плоскости линзы порядка $\lambda F/d$, где λ — длина волны.

Выберем небольшой элемент неба (фона). Световой поток от этого удаленного источника света, попадающий в глаз, очевидно, пропорционален d^2 . Площадь изображения такого протяженного источника пропорциональна F^2 . Отсюда освещенность фона $E_{\text{ф.1}} \sim d^2/F^2$. Световой поток от звезды также пропорционален d^2 , а площадь дифракционного изображения на сетчатке пропорциональна $(\lambda F/d)^2$. Поэтому, $E_{\text{зв.1}} \sim \frac{d^2}{(\lambda/d)^2 F^2} = \frac{d^4}{\lambda^2 F^2}$. Коэффициент

пропорциональности в каждом случае определяется яркостью источника и не меняется при изменении способа наблюдений. Для отношения освещенностей изображений звезды и фона на сетчатке невооруженного глаза можно записать

$$\alpha_1 = \frac{E_{зв.1}}{E_{ф.1}} \sim \frac{d^2}{\lambda^2}.$$

В реальных условиях дневного наблюдения это отношение, являющееся мерой контрастности изображений, таково, что невооруженный глаз практически не видит звезды на фоне яркого неба.

Пусть теперь глаз вооружен телескопом. Телескоп состоит из двух линз: объектива и окуляра. Ход лучей от бесконечно удаленного объекта, находящегося на оптической оси телескопа, показан на рисунке 145. Первое изображение объекта получается в фокальной плоскости объектива O_1 . Глаз рассматривает это изображение через окуляр как через лупу. Изображение, которое получается на сетчатке глаза, подобно изображению в фокальной плоскости объектива. Поэтому для решения нашей задачи достаточно рассмотреть отношение освещенностей изображений звезды и фона в этой плоскости. Повторяя рассуждения, приведенные выше, получим

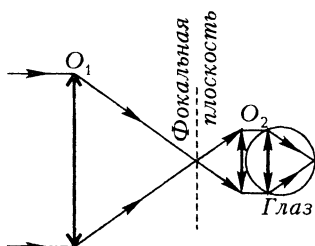


Рис. 145

рассмотреть отношение освещенностей изображений звезды и фона в этой плоскости. Повторяя рассуждения, приведенные выше, получим

$$\alpha_2 = \frac{E_{зв.2}}{E_{ф.2}} \sim \frac{D^2}{\lambda^2},$$

где D — диаметр объектива телескопа.

Поскольку коэффициенты пропорциональности в выражениях для α_1 и α_2 одни и те же (они зависят только от самих источников света — звезды и фона), то

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{D^2}{d^2}.$$

Таким образом, телескоп увеличивает контрастность изображения звезды на фоне неба в $(D/d)^2$ раз. В нашем примере $(D/d)^2 = 100$, так что $D/d = 10$.

Для больших астрономических телескопов это отношение достигает значений порядка $10^5 - 10^6$. С помощью таких телескопов можно увидеть днем даже очень слабые звезды.

175. Найдем вначале количество метана в вертикальном столбе земной атмосферы с площадью основания S . Давление этого столба

на поверхность Земли равно атмосферному давлению p_0 . С другой стороны, это давление равно силе тяжести воздушного столба, деленной на площадь S . Пренебрегая изменением ускорения силы тяжести с высотой (это можно сделать, так как граница атмосферы лежит на высоте около 200 км, а это много меньше радиуса Земли 6400 км), мы можем записать

$$p_0 = \frac{mg}{S}.$$

Отсюда

$$m = \frac{p_0 S}{g}.$$

Умножив m на коэффициент α , выражающий долю метана в воздухе, получим массу метана в этом столбе:

$$m_{\text{CH}_4} = \alpha m = \frac{\alpha p_0 S}{g}.$$

Теперь найдем, слой какой толщины x составляла бы эта масса метана при нормальных условиях (площадь основания цилиндра по-прежнему равна S). Запишем уравнение газового состояния:

$$p_0 S x = \frac{m_{\text{CH}_4}}{M} RT,$$

где Sx — объем массы метана m_{CH_4} , $M = 16 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса метана, $T = 273$ К и $p_0 = 1$ атм. Подставив в это уравнение выражение для массы метана, найдем

$$x = \frac{\alpha RT}{gM}.$$

Если энергия излучения равна вначале E_0 , то после того как излучение пройдет слой толщиной $a = 1$ см, энергия излучения станет равной $(1 - q)E_0$, где $q = 0,98$ — коэффициент поглощения. Следующий сантиметр метана поглотит q -ю часть этой оставшейся энергии излучения. В результате, после того как излучение пройдет слой метана толщиной 2 см, энергия излучения будет составлять $(1 - q)^2 E_0$, и т.д. После прохождения слоя метана толщиной x энергия излучения будет составлять

$$E = (1 - q)^{x/a} E_0,$$

т.е. $\left((1 - q)^{x/a}\right)$ -ю часть первоначального излучения. Подставив в эту формулу численные значения всех входящих в нее величин, найдем, что при прохождении атмосферы излучение ослабнет приблизительно в $2,5 \cdot 10^3$ раз.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВА

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

ЗАДАЧИ

МЕХАНИКА

ТЕПЛОТА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ОПТИКА

РЕШЕНИЯ

Иосиф Шаевич Слободецкий

Лев Григорьевич Асламазов

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

Библиотечка «Квант»

Выпуск 86

Научный редактор *А.И.Черноуцан*

Редактор *В.А.Тихомирова*

Технический редактор *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

ИБ № 50

Формат 84×108 1/32. Бум. офс. нейтр. Гарнитура кудряшевская

Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,5. Заказ 4022. Тираж 2500 экз.

117296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»

Отпечатано на ордена Трудового Красного Знамени

ГУП Чеховский полиграфический комбинат

Министерства Российской Федерации по делам печати,

телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

142300, г. Чехов Московской области

Тел (272) 71-336. Факс (272) 62-536



БИБЛИОТЕЧКА
КВАНТ